Esercizio 1 In $V = \mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio U_k formato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + kx_2 + 2x_3 = 0 \\ kx_1 + (k-1)x_2 + (3-k)x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di U_k al variare di k.

(b) Sia k_0 il valore di k per cui $\dim(U_k)$ è massima. Determinare una base per U_{k_0}.

(c) Determinare una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(d) Determinare una base per $U_{k_0} \cap W$.

Esercizio 2 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre (nella variabile t) con termine noto nullo, W lo spazio vettoriale delle matrici reali antisimmetriche 3×3.

(a) Determinare basi per V e W.

(b) Sia $F : V \to W$ l'applicazione lineare definita da

$$F(at + bt^2 + ct^3) = \begin{pmatrix} 0 & b+a & b+c \\ -a-b & 0 & a-c \\ -b-c & -a+c & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice di F rispetto alle basi determinate nel punto precedente.

(c) Determinare basi per $Ker(F)$, $Im(F)$.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\10\\2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$. Calcolare $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Spiegare perchè F non può essere iniettiva. Completare una base di $Ker(F)$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in V.

(b) Definire la nozione di applicazione lineare $F : V \to W$.

(c) Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Enunciare la relazione tra le dimensioni di V, $\ker(F)$, $Im(F)$.

(d) Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli.

(e) Sia S lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 3×3 e T quello dei polinomi di grado minore o uguale a 5. Scrivere un isomorfismo $S \to T$.