Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si considerino le rette r, s di equazioni

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r ed s, specificando se sono parallele e distinte, coincidenti, incidenti o sghembe.

(b) Determinare un'equazioni cartesiana per il piano π che le contiene entrambe.

(c) Determinare la distanza di π dal punto A di coordinate $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Esercizio 2. Si cosideri l'operatore lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalle seguenti condizioni:

$$L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di L rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ assunta come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la matrice B di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ assunta come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(c) Si dica se L è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (a) Si determini una base dello spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 3×3 simmetriche a traccia nulla.

(b) Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre a coefficienti reali. Si provi che

$$W = \{p \in V \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V e se ne determini una base.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$.
(a) Si definisca la nozione di *base* di V.

(b) Sia W uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Si costruisca un isomorfismo $F : V \to W$.

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli indici di g .
(b) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a g.