SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (18–12–2001)

Esercizio 1 (a) Equazioni vettoriali per r sono:

$$r: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè i vettori direttori direttori di r, s sono proporzionali (in effetti uguali), concludiamo che le rette sono parallele. Poichè il punto di s $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ non appartiene ad r, le rette sono distinte.

(b) I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ generano la giacitura di π; pertanto π ha equazione vettoriale $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Un'equazione cartesiana di π si ottiene dalla precedente eliminando i parametri s, t; risulta $x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$.

(c) La distanza tra π ed A si ottiene sostituendo le coordinate di A in $\left|\frac{x_1+2x_2+x_3-1}{\sqrt{6}}\right|$; il valore cercato è $\sqrt{6}$.

Esercizio 2 (a) Poichè

$$L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) - L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) - L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Essendo $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si ha $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) L è diagonalizzabile poichè ha autovalori reali è distinti; ciò segue dal fatto che, essendo B triangolare superiore, i suoi autovalori sono gli elementi sulla diaginale principale: $1, 0, -1$.

Esercizio 3 (a) Lo spazio in considerazione (chiamiamolo U) è l'insieme delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix}$; la relazione

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} =$$
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

implica che le cinque matrici a secondo membro sono un insieme di generatori per U. Usando la definizione è facile vedere che tali matrici sono anche linearmente indipendenti, dunque formano una base di U, che ha pertanto dimensione 5.
(b) Siano $p, q \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$(\alpha\, p + \beta\, q)(1) = \alpha\, p(1) + \beta\, q(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$
$$(\alpha\, p + \beta\, q)(-1) = \alpha\, p(-1) + \beta\, q(-1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

pertanto $\alpha\, p + \beta\, q \in W$; dunque W è un sottospazio. Si ha poi

$$W = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

Risolvendo il sistema si deduce che una base di W può essere $\{1 - t^2, t - t^3\}$. Concludiamo che W ha dimensione 2.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) Il polinomio caratteristico di A è $(t-1)(t-3)^2$, pertanto gli autovalori sono 1, 3. Essendo tali autovalori positivi, g è definita positiva e gli indici sono $i_+(g) = 3$, $i_-(g) = 0$, $i_0(g) = 0$.

(b) Autovettori relativi a 1, 3, 3 sono $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Si verifica facilmente che tali vettori sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Essi sono anche una base ortogonale rispetto a g; infatti:

$$g(v_1, v_2) = v_1^t A v_2 = v_1^t (A v_2) = v_1^t (3 v_2) = 3\, v_1^t \cdot v_2 = 0.$$

Similmente si dimostra che $g(v_1, v_3) = g(v_2, v_3) = 0$.