ESERCIZI SUI CAMPI

NOVEMBRE 2019

1) Sia F un campo e α un elemento algebrico su F di grado dispari. Si dimostri che $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

2) Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono isomorfi (come campi).

3) Siano $F \subseteq E$ campi e $A := \{\alpha \,|\, \alpha \in E,\ \alpha \text{ algebrico su } F\}$. Si dimostri che A è un sottocampo di E contenente F.

4) Siano $F \subseteq E$ campi, $\alpha, \beta \in E$, α algebrico su F e β trascendente su F. Si dimostri che $\alpha + \beta$ è trascendente su F.

5) Dire se esistono relazioni di inclusione tra i seguenti campi: $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$.

6) Sia F un campo e α, β elementi algebrici su F di grado 3. Determinare $|F(\alpha, \beta) : F|$.

7) Sia $f := x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e $b \in \mathbb{C}$ tale che $f(b) = 0$. Provare che $\mathbb{Q}(b)$ contiene solo una radice di f.

8) Siano $F \subseteq E$ campi, E estensione algebrica di F. Si provi che

(1) $|E| \leq |F[x]|$;
(2) esistono numeri reali trascendenti su $\mathbb{Q}$.

9) Sia $\alpha := \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Si determini

(1) $\min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$;
(2) $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2)|$.

10) Determinare i gradi su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi: $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$, $E := \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$, $E \cap \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$, $E \cap \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$.

11) Dire se gli anelli $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+2x+2)_{\mathbb{Z}_3[x]}$ e $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)_{\mathbb{Z}_3[x]}$ sono isomorfi e, nel caso, determinarne un isomorfismo esplicito.

12) Siano $f := x^3 - x - 1$, $g := x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e ω e α loro radici in qualche estensione di $\mathbb{Q}$, rispettivamente. Si determini

(1) $|\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}|$;
(2) l'inverso di $1 + \omega$ (come combinazione lineare di $1, \omega, \omega^2$);
(3) $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ (come combinazione lineare di $1, \alpha$).

13) Sia $\omega := 2i + \sqrt[3]{5} \in \mathbb{C}$. Si determini

(1) $|\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}|$, $|\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}(i)|$ e $|\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})|$;
(2) $\min_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})}(\omega)$ e $\min_{\mathbb{Q}(i)}(\omega)$.

14) Descrivere $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)|\mathbb{Q})$ per $\omega \in \{\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2}+\sqrt{5}\}$.

15) Descrivere $\mathrm{Gal}(f)$ dove $f := x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. .