

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

Papi - Procesi Ciampi

12 ottobre 2007

1. Dimostrare che la seguente relazione:

$$a \equiv b \iff \cos^2 a + \sin^2 b = 1$$

definita nell'insieme dei numeri reali, è una relazione di equivalenza.

Determinare la partizione in classi di equivalenza ed in particolare la classe di equivalenza $[\frac{\pi}{3}]$

2. Dimostrare che un gruppo $(G; \cdot)$ è commutativo se, e solo se, $\forall a, b \in G$ risulta $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.
3. Costruire, utilizzando le nozioni fin qui note sui gruppi, le tabelle moltiplicative possibili per un gruppo G di ordine quattro $G = \{u, a, b, c\}$.
(a meno del "nome" degli elementi)
4. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$ le relative unioni e intersezioni, disegnare il reticolo di tali sottogruppi.
(Si ricordi che i sottogruppi di tale gruppo possono avere soltanto d elementi, per d che divide 6. Ripetere eventualmente l'esercizio per altri moduli)
5. Nel gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ si determini, giustificando la risposta, quale fra i seguenti sottoinsiemi è un sottogruppo:
 - (a) $S_1 = \{\overline{30}, \overline{-9}, \overline{-3}, \overline{12}\}$
 - (b) $S_2 = \{\overline{-2}, \overline{2}, \overline{0}\}$
 - (c) $S_3 = \{\overline{6}, \overline{3}, \overline{-3}, \overline{9}, \overline{-9}\}$
 - (d) $S_4 = \{\overline{4}, \overline{8}, \overline{12}\}$
6. Nel gruppo $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ si verifichi che il sottoinsieme $T = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$ è un sottogruppo; si determini poi la partizione in classi laterali determinata da T .

7. Si scriva la tabella moltiplicativa del gruppo dei movimenti rigidi del rettangolo; scelto poi un sottogruppo con due elementi si determini la partizione in classi laterali da esso indotta e si verifichi che la partizione in classi laterali destre coincide con quella in classi laterali sinistre.

Si ripeta l'esercizio per il gruppo dei movimenti rigidi del quadrato ed un suo sottogruppo con due elementi, osservando che, tranne che in un caso, le partizioni in classi laterali destre e sinistre sono differenti.