Corso di laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche - 2002-03
Corso di Algebra - Canale Unico
Esame : 13 - Febbraio - 2003

ESERCIZIO 1 *(a) Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A \cdot B$ *sia diagonale.*
(b) Dimostrare che A^n *è diagonalizzabile per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *e determinare una matrice diagonale simile ad* A^n.

SOLUZIONE: (a) L'equazione caratteristica $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ è $1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0$ e quindi gli autovalori della matrice A sono 1 e -1. L'autospazio di 1 è generato dal vettore $(-1, -2, 1)$ e l'autospazio di -1 dai vettori $(1, 2, 0)$ e $(-1, 0, 1)$, quindi una matrice M che diagonalizza A per similitudine, ovvero tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale, è la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Osserviamo che A^2 è la matrice identica e quindi $A^n = A$ per n dispari e A^n è l'identità per n pari. L'asserto segue immediatamente.

ESERCIZIO 2 *Sia A la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Si consideri l'applicazione

$$L : \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$$

definita ponendo

$$L(X) = A \cdot X - X \cdot B$$

(a) Si dimostri che L è un'applicazione lineare

(b) Si determini il nucleo e l'immagine di L

(c) Si determini la matrice associata ad L nella base

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE: (a) $L(X+Y) = A \cdot (X+Y) - (X+Y) \cdot B = A \cdot X + A \cdot Y - X \cdot B - Y \cdot B = A \cdot X - X \cdot B + A \cdot Y - Y \cdot B = L(X) + L(Y)$

(b) Il nucleo è costituito dalle matrici

$$t \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'immagine è generata dalle immagini delle matrici E_{11}, E_{12}, E_{21} e ha equazione $x_{21} + x_{22} = 0$.

(c) La matrice richiesta è:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\left(\frac{5}{2}\right) & \frac{7}{2} & -\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\left(\frac{5}{2}\right) & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\left(\frac{5}{2}\right) \\ -\left(\frac{7}{2}\right) & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\left(\frac{7}{2}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{5}{2} & -\left(\frac{7}{2}\right) & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3 *Determinare tutti i sottogruppi di S_3, indicando quali sono abeliani. Per ognuno dei sottogruppi ciclici H indicare il valore di n per cui H è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.*

SOLUZIONE: Gli elementi di S_3 sono: l'identità e, le trasposizioni $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ e gli elementi $\sigma = (1,2,3)$ e $\tau = (1,3,2) = \sigma^{-1}$. Oltre ai sottogruppi banali $\{e\}$ e S_3 abbiamo i tre sottogruppi ciclici di ordine 2 generati dalle trasposizioni, ognuno dei quali è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e il sottogruppo ciclico di ordine 3 generato da τ (ovvero da σ), isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Sia H un sottogruppo di G diverso dai gruppi ciclici già considerati. H deve contenere almeno due elementi a e b diversi dall'identità. Non è difficile verificare che H deve contenere almeno quattro elementi distinti, e, a, b e $a \cdot b$. Per il teorema di Lagrange deve essere allora $H = S_3$.

ESERCIZIO 4 *(a) Sia H un sottogruppo di un gruppo G e siano aH, bH classi laterali di H in G. Dimostrare che queste classi laterali, se non coincidono, non hanno elementi in comune.*
(b) Siano G un gruppo e H un sottogruppo finito. Dimostrare che il numero degli elementi di una qualunque classe laterale aH è uguale al numero degli elementi di H.
(c) Siano G un gruppo finito e H un suo sottogruppo. Dimostare che l'ordine di H è un divisore dell'ordine di G.

SOLUZIONE: Si rimanda ai testi consigliati.