Corso di laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche - 2002-03

Corso di Algebra - Canale Unico

Esame : 3 - Luglio - 2003

ESERCIZIO 1 *Sia V lo spazio delle matrici quadrate di ordine 3 a coefficienti reali, V^s il sottospazio di V costituito dalle matrici simmetriche, V^a quello costituito dalle matrici antisimmetriche. Sia S_3 il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1,2,3\}$ e sia $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$.*
(a) Per ogni $\sigma \in S_3$ si definisca $L_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$L_\sigma(e_1) = e_{\sigma(1)} \qquad L_\sigma(e_2) = e_{\sigma(2)} \qquad L_\sigma(e_3) = e_{\sigma(3)}$$

Determinare, per ogni $\sigma \in S_3$, la matrice M_σ che rappresenta L_σ nella base standard.
(b) Sia W lo spazio generato dalle matrici M_σ. Determinare la dimensione di W e la dimensione di $W \cap V^s$.
(c) Si consideri l'isomorfismo tra V e $\mathbb{R}^9$ ottenuto giustapponendo le righe di una matrice. Si consideri la funzione $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$< A, B >= Tr(A \cdot B^T).$$

Verificare che, grazie all'isomorfismo di cui sopra, la funzione $<\ ,\ >$ si identifica al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^9$ e che V^s e V^a sono sottospazi ortogonali rispetto a questo prodotto scalare (Sugg. Dimostrare preliminarmente che $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$)

SOLUZIONE:
(a) La matrice M_σ si ottiene prendendo come i-esima colonna la colonna di posto $\sigma(i)$ nella matrice identità di ordine 3.
(b) Le matrici M_e, $M_{(1,2)}$, $M_{(1,3)}$ e $M_{(2,3)}$ sono linearmente indipendenti (ognuna ha una posizione in cui ha 1 mentre le altre hanno 0) e sono simmetriche, quindi generano un sottospazio di V^s di dimensione 4. D'altra parte

$$M_{(1,2,3)} + M_{(1,3,2)} = M_{(1,2)} + M_{(1,3)} + M_{(2,3)} - M_e$$

mentre

$$M_{(1,2,3)} - M_{(1,3,2)}$$

è antisimmetrica. Quindi una base di M_σ è costituita da M_e, $M_{(1,2)}$, $M_{(1,3)}$, $M_{(2,3)}$, $M_{(1,2,3)} - M_{(1,3,2)}$ e i primi quattro elementi costituiscono una base di $M_\sigma \cap V^s$. Le dimensioni richieste sono pertanto 5 e 4.
(c) $Tr(A \cdot B^T) = \sum_{i=1}^3 (\sum_{j=1}^3 A_{i,j} \cdot (B^T)_{j,i}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 A_{i,j} B_{i,j}$ e l'ultima espressione coincide con la somma dei prodotti degli elementi nella stessa posizione dei vettori di $\mathbb{R}^9$ costruiti giustapponendo le righe di A e le righe di B rispettivamente. La relazione $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$ si dimostra sviluppando in maniera analoga i due membri dell'equazione. Verifichiamo ora che se A è simmetrica ($A^T = A$) e B è antisimmetrica ($B^T = -B$) allora $< A, B >= 0$. Infatti

$$< A, B >= Tr(A \cdot B^T) = Tr(-A \cdot B) = -Tr(A^T \cdot B) = -Tr(B \cdot A^T) = - < B, A >$$

Ma $< A, B >=< B, A >$ perché il prodotto scalare standard è simmetrico,da cui segue il risultato.

ESERCIZIO 2 *Sia $k[X]$ lo spazio dei polinomi nella variabile X a coefficienti nel campo k. Sia $k[X]_n$ il sottoinsieme di $k[X]$ costituito dai polinomi di grado minore o uguale n.*
(a) Verificare che $k[X]_n$ è uno spazio vettoriale e che $\mathcal{B}_n = \{1, X, \ldots, X^n\}$ è una base di $k[X]_n$.
(b) Sia g un polinomio di grado k. Si definisca $L_g^n : k[X]_n \to k[X]_{n+k}$ ponendo $L_g^n(h) = g \cdot h$. Verificare che L_g^n è una trasformazione lineare.
(c) Sia $D_n : k[X]_n \to k[X]_{n-1}$ la funzione che associa ad un polinomio la sua derivata. Determinare la matrice che rappresenta D_n scegliendo come base dello spazio di partenza $\mathcal{B}_n$ e come base dello spazio di arrivo $\mathcal{B}_{n-1}$
(d) Sia $g = x - 1$. Determinare una base di $k[X]_2$ che diagonalizza l'operatore lineare $D_3 \circ L_g^2 : k[X]_2 \to k[X]_2$.

SOLUZIONE: (a) la somma e il prodotto di polinomi verificano gli assiomi di spazio vettoriale. L'applicazione $k^{n+1} \to k_n[X]$ che associa al vettore $(a_0, \ldots, a_n)$ il polinomio $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ è un isomorfismo e l'insieme $\{1, X, \ldots, X^n\}$ è l'immagine della base standard e quindi è una base.
(b) $L_g^n(f_1 + f_2) = g(f_1 + f_2) = g \cdot f1 + g \cdot f_2 = L_g^n(f_1) + L_g^n(f_1)$. Le altre condizioni si verificano in modo analogo
(c) È la matrice $\mathcal{D}_n$ di ordine $n \times (n+1)$ definita dalle condizioni $\mathcal{D}_{n i,i+1} = i$, altrimenti $\mathcal{D}_{n i,j} = 0$
(d) Se $g = (x-1)$, la matrice associata a L_g^2 scegliendo come base dello spazio di partenza $\mathcal{B}_2$ e come base dello spazio di arrivo $\mathcal{B}_3$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a D_3 scegliendo come base dello spazio di partenza $\mathcal{B}_3$ e come base dello spazio di arrivo $\mathcal{B}_2$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice associata all'operatore $\mathcal{D}_3 \circ L_2^2$ è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha tre autovalori distinti 1, 2 e 3 e quindi è diagonalizzabile. Una base di autovettori è $(1,0,0)$, corrsipondente al polinomio 1; $(1,-1,0)$, corrspondente al polinomio $x-1$; $(1,-2,1)$, corrispondente al polinomio $(x-1)^2$.

ESERCIZIO 3 *Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi, $\mathbb{C}^*$ il gruppo dei numeri complessi non nulli rispetto al prodotto, U_n l'insieme delle radici n-esime dell'unità, $U = \cup_1^\infty U_n$, T l'insieme dei numeri complessi di modulo uno.*
(a) Dimostrare che T, U e U_n sono sottogruppi di $\mathbb{C}^*$ e determinare un elemento di T che non appartiene ad U.
(b) Dimostrare che per ogni n, U_n è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE: (a) Le radici n-esime dell'unità sono i numeri complessi della forma $e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. La relazione

$$e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}} \cdot e^{\frac{2k'\pi\mathbf{i}}{n}} = e^{\frac{2(k+k')\pi\mathbf{i}}{n}}$$

mostra che U_n è chiuso rispetto al prodotto. Contiene l'unità (che si ottiene, per esempio, per $k = 0$) ed essendo un insieme finito è anche chiuso rispetto all'inverso. Quindi è un sottogruppo di $\mathbb{C}^*$. Gli elementi di U sono tutti e soli quelli della forma $e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ e di $n \in \mathbb{N}$. La relazione

$$e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}} \cdot e^{\frac{2k'\pi\mathbf{i}}{n'}} = e^{\frac{2(kn'+k'n)\pi\mathbf{i}}{n\cdot n'}}$$

mostra che U è chiuso rispetto al prodotto. Contiene l'unità (che si ottiene, per esempio, per $k = 0$, n qualsiasi) e l'inverso dell'elemento $e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}$ è l'elemento $e^{-\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}$. Gli elementi di T sono i numeri complessi della forma $e^{\theta\mathbf{i}}$. La verifica che è un gruppo si fa come negli altri casi. Un elemento di T che non appartiene ad U è per esempio e^i.
(b) Definiamo l'applicazione $\alpha : \mathbb{Z} \to U_n$ ponendo $\alpha(h) = e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}$. L'applicazione è suriettiva e il nucleo è $n\mathbb{Z}$, da cui segue il risultato.

ESERCIZIO 4 *Dopo aver richiamato le nozioni di dimensione di uno spazio vettoriale, applicazione lineare, nucleo e immagine di una applicazione lineare, dimostrare il seguente teorema.*
Teorema *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare di V in un altro spazio W. Siano n la dimensione di V, q la dimensione del nucleo di L, s la dimensione dell'immagine di L. Allora $n = q + s$.*

SOLUZIONE: Si rimanda ai testi consigliati.