ESERCIZI SU AZIONI E TEOREMI DI SYLOW

Azioni di gruppo su di un insieme.

Esercizio 1. Sia G un gruppo e $H \leq G$ tale che $|G : H| = n > 1$. Provare che G contiene un sottogruppo normale il cui indice divide $n!$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo e $H \leq G$ finito. Posto, per ogni $x \in G$ e $h_1, h_2 \in H$,

$$(h_1, h_2)x := h_2 x h_1^{-1},$$

provare che questo definisce un'azione di $H \times H$ su G.

Posto, per ogni $x \in G$,

$$f_x : (H \times H)x \longrightarrow G, \qquad (h_1, h_2)x \longmapsto h_2 x h_1^{-1} x^{-1},$$

provare che H è un sottogruppo normale di G se, e solo se, $f_x((H \times H)x) \subseteq H$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su di un insieme Ω e sia $H \trianglelefteq G$. Provare che

$$|H\alpha| = |H\beta| \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega.$$

Esercizio 4. Per ogni $n \geq 3$ descrivere $C_{s_n}(1\,2\,3)$.

Esercizio 5. Per ogni $n \geq 4$ descrivere A_n'.

Esercizio 6. Sia G un gruppo e Ω un insieme con almeno 3 elementi. Un'azione di G su Ω si dice 2-transitiva se per ogni $x, x_1, y, y_1 \in \Omega$ con $x \neq x_1$ e $y \neq y_1$ esiste $g \in G$ tale che

$$gx = y \quad \text{ e } \quad gx_1 = y_1.$$

Provare che un'azione di G su Ω è 2-transitiva se, e solo se, G_x agisce transitivamente su $\Omega \setminus \{x\}$.

Esercizio 7. Sia G un gruppo finito con almeno 2 elementi tale che ogni coppia di suoi elementi diversi da 1_G sono coniugati. Determinare l'ordine di G.

Teoremi di Sylow.

Esercizio 8. Sia G un gruppo finito e $H \leq G$ tale che $|G : H| = p$, dove p è il più piccolo divisore primo di $|G|$. Provare che H è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 9. Sia p un numero primo. Determinare il numero dei p-Sylow di S_p.

Esercizio 10. Provare che un gruppo di ordine 455 è ciclico.

Esercizio 11. Sia G un gruppo di ordine pq, dove p e q sono primi tali che $p > q$. Provare che G ha un p-Sylow normale e, se G non è abeliano, allora $q \mid p - 1$ e G ha p q-Sylow.

Esercizio 12. Sia G un gruppo di ordine p^2q, dove p e q sono primi. Provare che G ha un p-Sylow o un q-Sylow normale.

Esercizio 13. Dire se un gruppo di ordine 30 ha un sottogruppo di ordine 15.

Esercizio 14. Sia P un p-gruppo finito e $N \trianglelefteq P$. Provare che $|N \cap Z(P)| > 1$.

Esercizio 15. Dire se un gruppo di ordine 1000000 è semplice.

Esercizio 16. Determinare il numero di gruppi non-isomorfi di ordine $11^2 13^2$.

Esercizio 17. Sia G un gruppo di ordine p^2q^2, dove p e q sono primi tali che $p > q$. Provare che G ha un q-Sylow normale se $|G| \neq 36$.

Esercizio 18. Determinare i Sylow di A_5.

Esercizio 19. Sia G un gruppo di ordine p^3q, dove p e q sono primi distinti. Determinare il possibile ordine di G se non ha nè un q-Sylow normale nè un p-Sylow normale.