ESERCIZI SUI GRUPPI

OTTOBRE 2018

1) Sia G un gruppo e $H, K \leq G$. Si dimostri che

(1) $H \cup K \leq G \iff H \subseteq K \circ K \subseteq H$;
(2) $HK \leq G \iff HK = KH$.

2) Siano G un gruppo. Si dimostri che

$$G \text{ è abeliano} \iff \forall x, y \in G\ (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

3) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ e $T_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax + b$. Si ponga $G := \{T_{ab} \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ e $N := \{T_{1b} \,|\, b \in \mathbb{R}\}$. Si provi che

(1) $(G, \circ)$ è un gruppo;
(2) N è un sottogruppo normale di G;
(3) G/N è isomorfo a $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

4) Sia G un gruppo. Per ogni $x \in G$ si ponga $\tau_x : G \longrightarrow G,\ y \longmapsto xyx^{-1}$. Si provi che

(1) $\tau_x \in \mathrm{Aut}(G)$;
(2) la funzione $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ x \longmapsto \tau_x$ è un omomorfismo di gruppi e $\mathrm{Inn}(G) := f(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$;
(3) $\mathrm{Ker}(f) = \{g \,|\, g \in G,\ gh = hg\, \forall h \in G\} =: Z(G)$, il *centro* di G;
(4) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

5) Sia G un gruppo e $H, K \leq G$ con H normale in G. Si dimostri che

(1) $H \cap K$ è un sottogruppo normale di K e $\langle H, K \rangle = HK$;
(2) $HK/H \cong K/(H \cap K)$.

6) Sia G un gruppo e $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Si dimostri che $f(Z(G)) = Z(G)$.

7) Sia G un gruppo per cui esiste $n > 1$ taler che $(ab)^n = a^n b^n$ per ogni $a, b \in G$. Provare che

(1) $G^{(n-1)} := \{x^{n-1} \,|\, x \in G\} \leq G$;
(2) dire se $G^{(n-1)}$ è normale in G;
(3) per ogni $x, y \in G$, $x^{n-1}y^n = y^n x^{n-1}$.

8) Sia G un gruppo, $H, K \leq G$ e $f : H \times K \longrightarrow G,\ (h, k) \longmapsto hk$. Si provi che

(1) f è iniettiva se, e solo se, $H \cap K = \{1_G\}$;
(2) f è un omomorfismo da $H \times K$ in G se, e solo se, per ogni $h \in H$ e $k \in K$ vale che $hk = kh$.

9) Provare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

10) Determinare tutti gli omomorfismi da A_4 in S_3.

11) Sia G un gruppo ciclico finito. Determinare $\mathrm{Aut}(G)$.

12) Sia G un gruppo finito. Determinare se una funzione biettiva $f : G \longrightarrow G$ tale che $\mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(f(x))$ per ogni $x \in G$ è un automorfismo di G.

13) Sia G un gruppo finito e f un endomorfismo di G. Si provi che $\mathrm{o}(f(x))$ divide $\mathrm{o}(x)$ per ogni $x \in G$.

14) Sia G un gruppo abeliano finito e $x, y \in G$ tali che $\mathrm{mcd}(\mathrm{o}(x), \mathrm{o}(y)) = 1$. Si provi che $\mathrm{o}(xy) = \mathrm{o}(x) \cdot \mathrm{o}(y)$.

15) Sia G un gruppo finito, N un sottogruppo normale di G e $x \in G$ tali che $\mathrm{mcd}(\mathrm{o}(x), |G/N|) = 1$. Si provi che $x \in N$.

16)
(1) Si dimostri che $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ammette un unico sottogruppo ciclico di ordine n per ogni n;
(2) dire se $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è ciclico.

17) Provare che $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

18) Provare che A_5 è semplice.

19) Provare che $|Z(S_n)| = 1$ per ogni $n \geq 3$.

20) Provare che $S_n = \langle (1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n) \rangle$ per ogni $n \geq 3$.

21) Sia G un gruppo e $H \leq G$ tale che $G' \leq H \leq G$. Si provi che H è un sottogruppo normale di G.