ESERCIZI SU ARITMETICA SU $\mathbb{Z}$ E MODULARE

SETTEMBRE - OTTOBRE 2018

1) Sia $k \in \mathbb{N}$. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la relazione $\sim$ così definita:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \qquad a \sim b \iff 2k \mid a + 3b.$$

Dire per quali valori di k

(a) $\sim$ è riflessiva;
(b) $\sim$ è una relazione di equivalenza.

2) Dimostrare che un intero della forma $4n + 3$ non si può scrivere come somma di due quadrati interi.

3) Siano $m, n > 0$. Si provi che

(a) se $a \in \mathbb{Z}$ e $m \mid n$, allora $a^m - 1 \mid a^n - 1$;
(b) se $2^n - 1 \in \mathbb{P}$, allora $n \in \mathbb{P}$;
(c) se $a > 0$, $n > 1$ e $a^n - 1 \in \mathbb{P}$, allora $a = 2$ e $n \in \mathbb{P}$.

4) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$

(a) $7n^{34} - n^{21} + 22n^5 + 4n^4 - 21n$ è divisibile per 11;
(b) $n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n$ è divisibile per 7;

5) Si provi che per ogni numero primo $p > 3$

(a) esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $p \in \{6k + 1, 6k + 5\}$;
(b) per ogni $a \in \mathbb{Z}$ non divisibile per p vale che $p \mid a^{2p-2} + a^{p-1} + p - 2$;
(c) se $p > 5$, $p \mid \sum_{i=0}^{p-2} 10^i$.

6) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$,

(a) $\prod_{k=1}^{n}(2k - 1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$;
(b) per ogni $z \in \mathbb{Z}$, $n \mid z(z + 1)(z + 2)(z + 3) \ldots (z + n - 1)$;
(c) per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a - 1 \mid a^n - 1$;
(d) per ogni $a \in \mathbb{Z}$, se n è dispari, $a + 1 \mid a^n + 1$;
(e) $12 \mid 5^n + 7^n$ se, e solo se, n è dispari.

7) Si provi che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$

(a) $\mathrm{mcd}(ab, a + b) \mid \mathrm{mcd}(a^2, b^2)$;
(b) $3a + 4$ e $4a + 5$ sono coprimi.

8) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini l'ultima cifra di

(a) $n^5 - n$;
(b) $4^n + 9^n$.

9) Dire se le seguenti equazioni ammettono soluzioni intere:

(a) $324x + 81y = 26$;
(b) $324x + 81y = 27$;

10) Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni alle congruenze:

$$\begin{cases} 12387^{8525}x \equiv 1 \mod (10)\,, \\ 13x + 7 \equiv 0 \mod (12)\,. \end{cases}$$

11) Per $0 \leq a \leq 2$, dire se il sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 5 \mod (7)\,, \\ 4x \equiv a \mod (15)\,, \\ x \equiv 4 \mod (9) \end{cases}$$

ammette soluzioni.

12) Determinare per quali $a, b \in \mathbb{Z}$ il sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} ax \equiv 3 \mod (5)\,, \\ 3x \equiv b \mod (8) \end{cases}$$

ammette soluzioni.

13) Determinare per quali $a \in \mathbb{Z}$ il sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 3 \mod (5)\,, \\ ax \equiv 4 \mod (14) \end{cases}$$

ammette soluzioni e determinarle.

14) Determinare per quali $a, b \in \mathbb{Z}$ il sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 2x + 4 \equiv 0 \mod (6)\,, \\ 3x \equiv a \mod (10)\,, \\ 5x \equiv b \mod (35) \end{cases}$$

ammette soluzioni.