Esercizio 1.

1. Calcolare l'equazione del piano α perpendicolare alla retta r di equazione

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

e passante per $(2,1,1)$.

2. Calcolare il punto P di intersezione tra α e la retta s di equazione

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} .$$

1) r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = t \end{cases}$, dunque un suo vettore direttore, ad esempio $(0,1,1)$ può essere assunto come vettore normale per α. Imponendo il passaggio per $(2,1,1)$ si ottiene

$\alpha: \ y + z - 2 = 0$

2) s ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.

Dunque $P = \alpha \cap s$ è il punto le cui coordinate sono soluzione di $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$; quindi $P = (0,2,0)$

Esercizio 2.

1. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$.

2. Dato il numero complesso $z = 1-i$, calcolare $Re(z), Im(z), \bar{z}, z^{-1}, |z|$ e la sua forma trigonometrica.

1. base: $n=1$ $\quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$

passo induttivo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2-1} =$$

$$= \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n^2+n+1-1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{n}{2n+1}$$

2. $Re(z) = 1 \qquad Im\, z = -1$

$\bar{z} = 1+i \qquad |z| = \sqrt{2} \qquad z^{-1} = \frac{1+i}{2}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi}$

Esercizio 3. Determinare quali tra i seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^5$ e, in tal caso, calcolarne la dimensione. Motivare le risposte.

1. $\{(x, y, z, w, u) \mid -x = y - z + w - 3u\}$.
2. $\{t(2, -3, 1, 2, 5) + s(1, 0, 1, 1, 3) + r(1, -3, 0, 1, 2) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\}$.
3. $\{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 3, 4, 5)\}$.
4. $Span_{\mathbb{R}}\{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 3, 4, 5)\}$.
5. $\{(x, y, z, w, u) \mid x^2 = y^2 = 0\}$.

1. E' l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di una equazione non banale in cinque incognite. Quindi e' un sottospazio di dimensione 4

2. E' lo span di $v_1 = (2, -3, 1, 2, 5)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1, 3)$, $v_3 = (1, -3, 0, 1, 2)$, quindi e' un sottospazio.
Poichè $v_1 = v_2 + v_3$ e v_2, v_3 non sono proporzionali, $\{v_2, v_3\}$ e' una base e la dimensione e' 2.

3. Non e' un sottospazio (non e' chiuso rispetto alla somma, ad esempio)

4. E' un sottospazio che ha per base $(1, 2, 3, 4, 5)$, quindi ha dimensione 1.

5. $\{(x, y, z, w, u) \mid x^2 = y^2 = 0\} = \{(x, y, z, w, u) \mid x = y = 0\}$
$= \{(0, 0, z, w, u) \mid z, w, u \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^3$

Esercizio 4.

1. Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Ker(F)$ è generato da $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,0)$ e tale che

$$(*) \qquad F(0,1,-1,0) = (0,1,-1,0), \quad F(0,0,1,-1) = (0,0,1,-1).$$

2. Verificare che la matrice di F rispetto alla base canonica (standard) di $\mathbb{R}^4$ è
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dire se F è diagonalizzabile.

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, i quattro vettori

1. $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,0,1,-1)$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ e il teorema di estensione per linearità garantisce esistenza e unicità di una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(1,1,1,0) = F(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$ e tale che valgono le relazioni $(*)$. Chiaramente $\ker F \subseteq \mathbb{R}(1,1,1,0) \oplus \mathbb{R}(0,1,0,0)$. Poiché $(0,1,-1,0)$, $(0,0,1,-1)$ sono indipendenti, $\ker F = \mathbb{R}(1,1,1,0) \oplus \mathbb{R}(0,1,0,0)$.

2. $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$

$= F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Le condizioni assegnate implicano che, se V_0, V_1 denotano gli autospazi per F di autovalore $0, 1$, rispettivamente

$$V_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto $m_g(0) = m_g(1) = 2$ ed F è diagonalizzabile

Esercizio 5. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q_k(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (k^2 - 4)x_3^2 + 2x_1x_2,$$

ove k è un parametro reale. Determinare i valori di k per cui q_k è non degenere e quelli per cui è definita positiva.

La matrice della forma polare rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 \end{pmatrix}$$

Tale matrice è degenere solo quando $k^2-4=0$, pertanto la forma è non degenere per $k \neq \pm 2$.

I minori principali leading sono 2, 3, $3(k^2-4)$. Sono positivi quando $k^2 > 4$, cioè ~~$k \in (-\infty, 2)$~~ quando $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Altrimenti si possono calcolare gli autovalori, che sono 1, 3, k^2-4 giungendo alle stesse conclusioni