Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali.

1. $\int_Z xy\,dx\,dy, \quad Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 \le x \le \sqrt{y}\}$
2. $\int_Z x^2\,dx\,dy, \quad Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge |y| - 2, x^2 + y^2 \le 4\}$

$$1.\ \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y^2} xy\,dx = \int_0^1 \cancel{x}\, y\,dy \int_{\sqrt{y}}^{y^2} x\,dx = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{y}}^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^5}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{y^6}{12} - \frac{y^3}{6}\Big|_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$$2.\ \int_Z x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-x-2}^{x+2} x^2\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 \rho^3 \cos^2\vartheta\,d\rho$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \cancel{\tfrac{1}{3}}\, x^2 (x+2)\,dx + \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\vartheta)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} + \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 2.

1. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin(x+y-2)}{(x-1)^2+y^2-2y+1}.$$

2. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = x^2y^3 - 2xy + 5$ nel punto $(1, 1, 4)$.

1. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\text{sen}(x+y-2)}{(x-1)^2+y^2-2y+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\text{sen}((x-1)+(y-1))}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(t+s)}{t^2+s^2}$$

e tale limite non esiste (ad esempio se $t = s$

$\frac{\text{sen}\, 2t}{t^2} \to \infty$, se $t = -s$ $\left.\frac{\text{sen}\, t+s}{t^2+s^2}\right|_{t=-s} = 0$).

2. Ricordando che l'equazione del piano tangente (nelle ipotesi di differenziabilità che sono ovviamente soddisfatte nel nostro caso) è $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

si ha: $f_x = 2xy^3 - 2y$ $\quad f_y = 3x^2y^2 - 2x$

$z - 4 = y - 1$. $\quad y - z + 3 = 0$

Esercizio 3. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = 4xy^2 - x - 3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

$$f_x = 4y^2 - 1 \qquad f_y = 8xy - 3$$

$$\begin{cases} 4y^2 - 1 = 0 \\ 8xy = 3 \end{cases}$$

$$f_{xx} = 0 \qquad f_{xy} = 8y \qquad f_{yy} = 8x$$

$$H\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Il determinante è negativo, quindi il punto è di sella

$$H\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Come sopra.

$f(0,y) = -3y \qquad 0 \le y \le 1$

$f(x,0) = -x \qquad 0 \le x \le 1$

$f(1,y) = 4y^2 - 3y - 1 \qquad 0 \le y \le 1 \qquad f'(1,y) = 8y - 3$

$f(x,1) = 3x - 3 \qquad 0 \le y \le 1$

$f\left(1, \tfrac{3}{8}\right) = -\dfrac{25}{16}$

$f(0,0) = 0$

$f(1,0) = -1$

$f(0,1) = -3$

$f(1,1) = 0$

Massimo sul quadrato 0

Minimo sul quadrato -3

Esercizio 4. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 3y$$

sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{5}$.

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 3y + \lambda(x^2+y^2-5)$$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ y = \frac{3}{2} \\ x^2 = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \end{array}$$

$$(0, \sqrt{5}), \quad (0, -\sqrt{5}), \quad \left(\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I valori di f corrispondenti sono, $3\sqrt{5}$, $-3\sqrt{5}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{29}{4}$ per cui il massimo è $29/4$ e il minimo $-3\sqrt{5}$

Esercizio 5.

1. Un toro è un solido ottenuto dalla rotazione completa una circonferenza rispetto a una retta che non la interseca. Determinare il volume del toro in funzione del raggio r della circonferenza e della distanza d del centro della circonferenza dall'asse di rotazione.

2. Data la funzione $f(x,y) = e^{\frac{xy}{2}} - \log(\frac{2x}{y})$, si determini il dominio di f specificandone il tipo topologico e stabilendo se è connesso e compatto.

   Si verifichi poi che $(1,2)$ è un punto interno al dominio. Si mostri che l'equazione $f(x.y) = e$ definisce implicitamente intorno a $(1,2)$ sia una funzione $y = h(x)$ che una funzione $x = g(y)$. Si calcolino infine $h'(1)$ e $g'(2)$.

1. Dal teorema di Guldino segue che il volume è
$2\pi^2 d r$

2. Il dominio è $\frac{x}{y} > 0$, cioè $\{x>0, y>0\} \cup \{x<0, y<0\}$

È evidentemente illimitato (quindi non compatto) e sconnesso (i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$ non possono essere connessi da un arco).

$f(1,2) = e - \log(1) = e$

$f_x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} e^{\frac{xy}{2}} y \qquad f_x(1,2) = e - 1 \neq 0$

$f_y = \frac{1}{y} + \frac{1}{2} e^{\frac{xy}{2}} x \qquad f_y(1,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e \neq 0$

$h'(1) = -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)} = -\frac{2(e-1)}{e+1}$

$g'(2) = -\frac{f_y(1,2)}{f_x(1,2)} = -\frac{e+1}{2(e-1)}$