Esercizi di Algebra lineare

G. Romani

December 2, 2006

1. Esercizi sulle n-ple

1) Eseguire i seguenti calcoli.

$$(2,1)+(1-3); \qquad -4(2,2)+3(4,-2); \qquad 3(1,2,3)+(-2)(2,2,1)$$
$$(3,3,3)+2(4,2,1)+(-2)(1,4,2); \qquad (1,4,-1)+(-2)(2,-1,2)+(1,1,1)+2(1,4,2)$$

2) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Trovare il rango dei seguenti sistemi di n-ple.

$$\{(2,2,2),\ (1,1,1),\ (4,4,4)\} \qquad \{(-1,2),\ (4,2),\ (2,4)\}$$
$$\{(4,2,-1,3),\ (1,1,2,4),\ (7,3,-4,2)\}$$

4) Calcolare il rango delle seguenti matrici ed indicare tutte le possibili *righe indipendenti in numero pari al rango trovato.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -8 & -12 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Stabilire se esistono valori di k in relazione ai quali le terne seguenti sono linearmente dipendenti. In caso affermativo trovare i valori di k per i quali si ha la dipendenza lineare.

$$\begin{array}{ll} i) & (1, 2k+1, 2), (2, 2, 1), (4, 1, 0) \\ ii) & (1, 3, 1, 1), (k, 3k, k, 2), (1, 0, 1, 0) \end{array}$$

Soluzioni

1)

$(2, 1) + (1, -3) = (3, -2)$
$-4(2, 2) + 3(4, -2) = (-8, -8) + (12, -6) = (4, -14)$
$3(1, 2, 3) + (-2)(2, 2, 1) = (3, 6, 9) + (-4, -4, -2) = (-1, 2, 7)$
$(3, 3, 3) + 2(4, 2, 1) + (-2)(1, 4, 2) = (3, 3, 3) + (8, 4, 2) + (-2, -8, -4) = (9, -1, 1)$
$(1, 4, -1) + (-2)(2, -1, 2) + (1, 1, 1) + 2(1, 4, 2) = (1, 4, -1) + (-4, 2, -4) + (1, 1, 1) + (2, 8, 4) =$

2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1)(-2) = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = -6 + (-2)(-43) = 80$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(7) = -7$$

3) Le tre terne $\{(2,2,2),\ (1,1,1),\ (4,4,4)\}$ *sono tutte tra loro proporzionali. Quindi non se ne possono trovare due indipendenti. D'altronde sono diverse dalla terna nulla e quindi ne esiste una non nulla. Il rango è uno.*

Delle tre coppie $\{(-1,2),\ (4,2),\ (2,4)\}$ *le due coppie* $(4,2),\ (2,4)$ *sono indipendenti in quanto* $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$. *Vi sono pertanto due coppie indipendenti tra le tre coppie assegnate. D'altronde più di due coppie sono sempre dipendenti. Quindi il rango è due.*

4) Nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *vi è il minore non nullo* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. *Si tratta di un minore di ordine due. Non vi sono minori di ordine tre poiché la matrice ha due sole righe. Quindi rg* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Nella matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ *il minore* $|1|$ *è un minore non nullo di ordine uno. Gli orlati di ordine due di tale minore sono tutti nulli come può essere visto con un calcolo diretto. Quindi uno è l'ordine massimo dei minori* *non nulli. Il rango è uno. Lo stesso poteva essere visto osservando che nella matrice vi sono righe non nulle e che tutte le righe sono proporzionali tra di loro. Dunque il massimo numero di righe indipendenti. Di nuovo il rango risulta essere uno.*

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *ha il minore* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ *che è non nullo, di ordine due e non si possono ottenere minori di ordine più alto essendovi due sole colonne. Il rango è due.*

Passiamo alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -8 & -12 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. *Un minore non nullo di ordine due è* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. *I suoi orlati sono* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -8 & -12 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ *e* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$. *Il secondo vale* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 \cdot 8 = -20 \neq 0$. *Pertanto il rango è tre: esiste un minore non nullo di ordine tre ed il rango non può essere maggiore di tre trattandosi di una matrice con tre sole colonne.*

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *è una matrice quadrata di ordine tre con determinante 1. Il suo rango è tre.*

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *ha il minore* $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4 \neq 0$. *Il minore è di ordine tre. Non vi sono minori di ordine superiore a tre. Il rango è tre.*

5)

i) Le terne $(1, 2k+1, 2), (2, 2, 1), (4, 1, 0)$ *sono dipendenti se e solo se*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k+1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante secondo l'ultima colonna si trova

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2k+1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -12 - (1 - 4(2k+1)) = -12 - 1 + 8k + 4 = 8k - 9$$

Dunque il determinante è nullo, ovvero le tre terne sono dipendenti, se e solo se $k = \frac{9}{8}$.

ii) Le tre quaterne $(1,3,1,1),(k,3k,k,2),(1,0,1,0)$ *sono dipendenti se e solo se*

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ k & 3k & k & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 3$$

Affinché il rango della matrice sia minore di tre, debbono essere nulli tutti i minori di ordine tre. Tali minori sono i seguenti

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3k & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3k & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3k & k & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

L'annullarsi di detti minori dà luogo al seguente sistema di quattro equazioni lineari nell'unica incognita k

$$\begin{cases} 3k - 3k + 3k - 3k = 0 \\ 6 - 3k = 0 \\ 2 - k - (2 - k) = 0 \\ 6 - 3k = 0 \end{cases}$$

L'unica equazione indipendente del sistema è

$$6 - 3k = 0$$

che ammette come soluzione $k = 2$. *La risposta al quesito è che le tre quaterne sono indipendenti se e solo se* $k = 2$.

2. Esercizi sui sistemi di equazioni lineari.

1) Risolvere con la regola di Cramer e con il metodo delle eliminazioni successive i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y + t = 0 \\ y - 2t = 1 \\ x + y + z + 2t = 1 \\ 2x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

2) Dire per quale valore del parametro k il seguente sistema non può essere risolto con la regola di Cramer

$$\begin{cases} ky + t = 0 \\ y - 2t = 1 \\ x + y + kz + 2t = 1 \\ 2x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

3) Dire quale dei seguenti sistemi sono compatibili, quali no e risolvere quelli compatibili applicando il teorema di Rouché-Capelli

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-3y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-2z+t=1 \\ x-2y=0 \\ 3x-6y-2z+t=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z=0 \\ y-2z=1 \\ x+y+2z=1 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z+3t=1 \\ x-y-z-t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z=1 \\ x-2y=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+t=0 \\ y+t=1 \\ x+y-z+2t=1 \\ 2x-y+z-t=1 \end{cases}$$

4) Trovare un sistema fondamentale di autosoluzioni per ognuno dei seguenti sistemi omogenei.

$$\begin{cases} 2x+y+z+3t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+t=0 \\ y+t=0 \\ x+y-z+2t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$$

5) Trovare due diversi sistemi di autosoluzioni per il seguente sistema omogeneo.

$$\begin{cases} 4x+y+z+t=0 \\ x-y-3z-2t=0 \end{cases}$$

Esprimere in seguito la generica soluzione del sistema tanto come combinazione lineare delle soluzioni di un sistema di autosoluzioni trovato, quanto come combinazione lineare delle soluzioni dell'altro sistema fondamentale di autosoluzioni.

6) Stabilire in quale dei casi seguenti, la terna $\boldsymbol{z}$ *è esprimibile come combinazione lineare delle terne* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$. *Nei casi affermativi trovare tutte le maniere in cui la terna* $\boldsymbol{z}$ *si può esprimere come combinazione lineare delle terne* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

i) $\mathbf{x}=(1,2,3)$, $\mathbf{y}=(2,4,6)$, $\mathbf{z}=(0,2,3)$
ii) $\mathbf{x}=(1,2,3)$, $\mathbf{y}=(2,4,5)$, $\mathbf{z}=(0,2,3)$
iii) $\mathbf{x}=(1,2,3)$, $\mathbf{y}=(2,4,6)$, $\mathbf{z}=(3,6,9)$

7) Ripetere l'esercizio precedente anche in relazione alle quaterne $\boldsymbol{z}$ *ed alle quaterne rimanenti, dei casi sotto elencati*

i) $\mathbf{x}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{y}=(1,2,1,2)$, $\mathbf{z}=(0,0,0,1)$
ii) $\mathbf{x}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{y}=(1,2,1,2)$, $\mathbf{z}=(1,0,1,0)$
iii) $\mathbf{x}=(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{y}=(0,0,0,1)$, $\mathbf{t}=(1,0,0,0)$, $\mathbf{u}=(0,0,1,1)$, $\mathbf{v}=(0,1,0,1)$, $\mathbf{z}=(0,0,1,2)$
iv) $\mathbf{x}=(1,0,1,0)$, $\mathbf{y}=(0,1,0,1)$, $\mathbf{t}=(-2,3,-2,3)$, $\mathbf{u}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{v}=(-1,4,-1,4)$, $\mathbf{z}=(1,0,2,0))$

Soluzioni

1)
i) Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

è un sistema quadrato, con matrice dei coefficenti a determinante diverso da zero. Può pertanto essere risolto con la regola di Cramer. Secondo tale regola, la sua soluzione, unica, è data dalla formula seguente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\tfrac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \tfrac{1}{3}$$

Per risolvere lo stesso sistema con il metodo delle eliminazioni successive, si considera il sistema, diverso da quello dato ma equivalente, avente come prima equazione la stessa del sistema assegnato, e come seconda equazione *l'equazione che si ottiene dalla seconda equazione del sistema assegnato, sottraendole la prima equazione moltiplicata per* $\frac{1}{2}$*. In tal modo si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -\frac{3}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

dal quale si deduce $y = \frac{1}{3}$ *che sostituito nella prima equazione fornisce per* x *il valore* $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ii) Anche il sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

è un sistema quadrato con matrice dei coefficenti a determinante diverso da zero. La regola di Cramer è applicabile e fornisce per soluzione la seguente terna

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

Volendo seguire il metodo delle eliminazioni successive, ci si viene a trovare di fronte ad una difficoltà poiché nella prima equazione il coefficiente della prima variabile, della x*, è nullo e il procedimento usato in precedenza non può essere applicato. Allora si cambia l'ordine delle equazioni, (cambiamento che cambia il sistema solo formalmente ma non le sue soluzioni), mettendo al posto della prima equazione una qualunque delle rimanenti che però abbia come coefficiente della* x *un coefficente non nullo. Ad esempio si* *può mettere come prima equazione la seconda e come seconda equazione la prima:*

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

In tal modo la seconda equazione viene ad avere già nullo il primo coefficiente e non occorre modificarla. Basterà modificare la terza equazione in modo da annullarne il coefficente della x. Ciò può essere fatto sostituendo alla terza equazione del sistema assegnato ma riordinato, la terza equazione meno la prima (del sistema riordinato), moltiplicata per $\frac{1}{1} = 1$*. Si ottiene in tal modo il sistema*

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Ancora il sistema non è pronto per essere risolto. Bisognerà sostituire la terza equazione con la differenza della terza meno, moltiplicata per $\frac{1}{1} = 1$*, la seconda (si badi la seconda non la prima giacché se si utilizzasse la prima si reintrodurrebbe a fine procedimento la x, che nella seconda non è più presente):*

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 1 \\ -3z = 1 \end{cases}$$

L'ultima equazione trovata fornisce per la z il seguente valore: $z = -\frac{1}{3}$*. Tale valore sostituito nella seconda fornisce per la y il valore* $y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$*. Infine sostituendo nella prima equazione i valori trovati, per la x si ottiene* $x = 2\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

iii) Nell'ultimo esercizio si procede sulla base di quanto illustrato nei primi due.

2)

Il sistema

$$\begin{cases} ky + t = 0 \\ y - 2t = 1 \\ x + y + kz + 2t = 1 \\ 2x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

è un sistema quadrato. Potrà essere risolto con la regola di Cramer se e solo se la matrice dei coefficenti ha determinante diverso da zero. Pertanto dovrà *risultare*

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2k(1-2k) = 2k - 4k^2 \neq 0$$

Siccome risulta $2k - 4k^2 = 0$ *se e solo se o* $k = 0$ *oppure se* $k = \frac{1}{2}$, *si deduce che il sistema è risolubile con Cramer per tutti i valori di k diversi da zero e da un mezzo.*

3)

i) Dobbiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

la cui matrice incompleta è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre quella completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nella matrice incompleta il minore ottenuto considerando prima e seconda riga, prima e seconda colonna, è un minore non nullo. La matrice in questione non può avere rango maggiore di due poiché il rango di una matrice non può mai superare il minore dei due numeri: quello delle righe e quello delle colonne e nel nostro caso tale numero è due: il numero delle righe. Pertanto il rango della matrice incompleta è due. Ma il minore suddetto è anche un minore della matrice completa che a sua volta non può avere rango maggiore di due per il motivo detto. Anche il rango della matrice completa è due. Le due matrici hanno lo stesso rango. Il sistema è compatibile. Ammette soluzioni. Il numero delle incognite del sistema è tre. Quindi il numero delle incognite è maggiore del comune rango delle due matrici. Il sistema è indeterminato. Ammette infinite soluzioni. Precisamente ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ *soluzioni. Volendo calcolare le soluzioni con il metodo di Rouché-Capelli si cominciano a trascurare le equazioni che non sono relative alle righe considerate per individuare il minore non nullo nella matrice incompleta del sistema. Nel nostro caso, si sono considerate entrambe le righe della matrice. Non vi sono equazioni da scartare. Si va al secondo passo: si portano a secondo membro* *del sistema quelle incognite che non sono relative alle colonne del minore scelto sempre nella matrice incompleta. L'unica colonna non considerata è la terza. Si porta a secondo membro la z, la terza incognita. Si ottiene così il sistema seguente*

$$\begin{cases} x-2y=1+z \\ x-3y=0 \end{cases}$$

In tale sistema il secondo membro va pensato assegnato in funzione del parametro consistente nella z, l'incognita portata a secondo membro. Ora si può risolvere con Cramer: le incognite sono due, la x e la y, le equazioni sono pure due e inoltre la matrice dei coefficienti, per come è stato fatto il sistema, ha determinante non nullo in quanto dato proprio dal minore non nullo scelto dal quale si è partiti. Nel nostro caso la soluzione, del sistema pensato nelle sole incognite x ed y, sarà data dalla coppia

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+z & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-3z-3}{-1}=3z+3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-z-1}{-1}=z+1$$

La soluzione del sistema originari sarà invece data dalla terna

$$\begin{aligned} x&=3z+3 \\ y&=z+1 \\ z&=z \end{aligned}$$

Come si vede la terna non è una terna di numeri, ma una terna di funzioni. Per ottenere da tale terna di funzioni una terna di numeri, bisognerà assegnare un valore al parametro, ovvero a z, e per ogni scelta di tale parametro si otterrà una terna. Si ottengono in tal modo infinite terne dipendenti da un parametro, ∞^1 terne, ognuna delle quali è una soluzione del sistema assegnato.

ii) Passiamo al sistema

$$\begin{cases} y-2z+t=1 \\ x-2y=0 \\ 3x-6y-2z+t=2 \end{cases}$$

La matrice incompleta e quella completa sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il minore

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$$

è un minore non nullo che si trova in entrambe le matrici. Il suo ordine è tre ed è il massimo possibile tanto nella matrice incompleta quanto in quella completa. Pertanto le due matrici hanno entrambe rango tre ed il sistema è compatibile. Siccome il rango comune è minore del numero, quattro, delle incognite, il sistema compatibile è indeterminato. Le sue soluzion sono $\infty^{4-3} = \infty^1$. Tali soluzioni si ricavano lasciando le equazioni del sistema immutate (nel minore considerato intervengono tutte e tre le righe), ma portando a secondo membro la t, l'incognita relativa alla colonna, la quarta (quella non considerata nel minore). Si ottiene in tal modo il sistema, dipendente dal parametro t, nelle tre sole incognite, x,y,z:

$$\begin{cases} y - 2z = 1 + t \\ x - 2y = 0 \\ 3x - 6y - 2z = 2 + t \end{cases}$$

Tale sistema è risolubile con Cramer (è quadrato e la matrice dei coefficienti ha per determinante il minore non nullo che si è trovato). Una sua soluzione è data dalla terna, funzione del parametro t,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2+t & -6 & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1+t & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+t & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1+t & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+t & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

mentre le soluzioni del sistema originario sono date dalle quaterne, anche *esse funzione di t,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2+t & -6 & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1+t & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+t & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1+t & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+t & -2 \end{vmatrix}}{2}$$

$$t = t$$

I sistemi che rimangono, si risolvono in maniera analoga.

4)

i) La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x + y + z + 3t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango di tale matrice è due ed un minore non nullo è

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Con la scelta di tale minore il sistema può essere risolto semplicemente portando a secondo membro la terza e la quarta variabile (le due variabili che non sono relative alle colonne che intervengono nel minore):

$$\begin{cases} 2x + y = -z - 3t \\ x - y = z + t \end{cases}$$

e dando successivamente a tali variabili prima il valore uno alla z ed il valore zero alla t, poi il valore zero alla z ed il valore uno alla t. In tal modo si ottengono rispettivamente i sistemi

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = 0$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = -1$$

Il secondo sistema ha per soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -\tfrac{2}{3}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = -\tfrac{5}{3}$$

Il sistema fondamentale di autosoluzioni del sistema originario è pertanto dato dalle due quaterne

$$(0, -1, 1, 0)\,, \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

ii) La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è nullo (la terza riga è la somma delle prime due). Un suo minore non nullo di ordine massimo è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A partire da tale minore il sistema si risolve trascurando la terza equazione ovvero considerando il sistema ridotto

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Tale sistema può essere risolto in due diverse maniere. O si porta a secondo membro la seconda variabile (quella che è relativa alla colonna non considerata del minore) e si dà successivamente a questa il valore uno, ottenendo in tal modo il sistema

$$\begin{cases} z = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

al quale corrisponde la soluzione $(2, 1, -1)$ *del sistema originario e le soluzioni del sistema saranno poi tutte le terne proporzionali a tale terna. Altro modo per risolvere il sistema, consiste nell'osservare che si tratta di un sistema in* $n = 3$ *incognite, di* $m = n - 1 = 2$ *equazioni, di rango* $n - 1 = 2$ *e pertanto la sua generica soluzione sarà proporzionale alla terna dei tre minori della matrice dei coefficienti del sistema, ottenuti cancellando successivamente la prima, la seconda, la terza colonna, e prendendo tali minori con i segni alterni. La matrice dei coefficienti è*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

I tre minori con i segni alterni sono

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, -1)$$

Quindi la generica soluzione del sistema sarà proporzionale a tale terna.

iii) La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2y + t = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y - z + 2t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Quindi il rango del sistema è 4 pari al numero delle incognite. Si tratta di un sistema omogeneo determinato con unica soluzione quella che ogni sistema omogeneo ha sempre, quella nulla.

5)

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x + y + z + t = 0 \\ x - y - 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Due minori non nulli di ordine massimo sono, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

Al primo minore corrisponde il sistema che si ottiene portando a secondo membro la terza e la quarta variabile, ovvero il sistema

$$\begin{cases} 4x + y = -z - t \\ x - y = 3z + 2t \end{cases}$$

mentre al secondo minore corrisponde il sistema che si ottiene portando a secondo membro la prima e la terza variabile, ovvero il sistema

$$\begin{cases} y + t = -4x - z \\ -y - 2t = x + 3z \end{cases}$$

il sistema fondamentale di soluzioni calcolato a partire dal primo sistema ponendo una volta la terza variabile uguale ad uno e la quarta variabile uguale a zero e successivamente la terza variabile uguale a zero e la quarta uguale ad uno, è

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{13}{5}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1\right)$$

mentre il sistema fondamentale di autosoluzioni che corrisponde al secondo sistema ponendo la prima variabile uguale ad uno e la terza uguale a zero e, successivamente, la prima variabile uguale a zero e la terza uguale ad uno, è

$$(1, -7, 0, 3), (0, 1, 1, -2)$$

La generica soluzione del sistema scritta apartire dal primo sistema di autosoluzioni trovato è data da

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{13}{5}, 1, 0\right) z + \left(\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1\right) t = \left(\frac{2}{5}z + \frac{1}{5}t, -\frac{13}{5}z - \frac{9}{5}t, z, t\right)$$

La generica soluzione scritta a partire dal secondo sistema di autosoluzioni è

$$(1,-7,0,3)\,x+(0,1,1,-2)\,z=(x,-7x+z,z,3x-2z)$$

6)

i) Disponendo le tre terne

$$\mathbf{x}=(1,2,3),\,\mathbf{y}=(2,4,6),\,\mathbf{z}=(0,2,3)$$

come righe di una matrice, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria (ma non sufficente) affinché la terna z sia esprimibile come cobinazione lineare delle altre due, è che le tre terne siano linearmente dipendenti. Tale fatto avviene se e solo se il determinante della matrice scritta è uguale a zero. Si vede subito che questo è il caso. Ciò però non basta. Perché la terna z sia esprimibile come combinazione lineare delle altre due, ora che si è verificato che le tre terne sono dipendenti, è sufficiente, che le altre due terne siano tra loro indipendenti. Così però non è come si può verificare calcolando i tre minori di ordine due della matrice avente per righe le due prime terne. Rimane una sola possibilità per la terza terna per essere combinazione delle altre due: che il rango della matrice costituita dalle tre terne, sia uno. Infatti in tal caso tra le tre terne se ne può trovare almeno una non nulla e le altre due terne sono ad essa proporzionali. In particolare la terza terna risulterebbe proporzionale ad una delle prime due e quindi anche combinazione lineare delle prime due. Ma come si vede il rango della matrice non è uno è due: il minore costituito dalle ultime due righe e dalle prime due colonne è non nullo.

ii) Lo stesso procedimento si applica al secondo caso. Si vede che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2-2\cdot 0 = 2 \neq 0$$

questa volta è non nullo e quindi le tre terne, in questo caso, sono indipendenti. Nessuna delle tre terne è esprimibile come combinazione lineare delle altre due. In particolare la z non può eprimersi come combinazione lineare delle altre due.

iii) Si usa sempre lo stesso procedimento. Di nuovo il detreminante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

è nullo. Questa volta però il rango della matrice è uno: le tre terne sono proporzionali ad una qualunque di loro non nulla. In particolare la z può esere espressa come proporzionale alla prima trena e quindi anche come combinazione lineare delle prime due terne. Quanto al problema di vedere in tal caso in quante forme la z sia combinazione lineare delle prime due si procede al modo seguente.

Deve risultare

$$(3,6,9) = \lambda\,(1,2,3) + \mu\,(2,4,6)$$

per opportuni valori di λ e μ. *Effettuando i calcoli scritti a secondo membro,si ottiene l'uguaglianza tra terne*

$$(3,6,9) = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + 4\mu, 3\lambda + 6\mu)$$

uguaglianza che sarà soddisfatta se e solo se risulterà

$$\begin{cases} 3 = \lambda + 2\mu \\ 6 = 2\lambda + 4 \\ 9 = 3\lambda + 6\mu \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni in due incognite, λ *e* μ. *La matrice dei coefficienti è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Il rango di tale matrice è uno. Le soluzioni saranno ∞^1. *In corrispondenza ad ogni soluzione si avrà una espressione della z come combinazione lineare delle prime due terne.*

7) Si procede come visto nel caso precedente

3. Esercizi sullo spazio vettoriale numerico reale R^n.

1) Si determini una base per il sottospazio vettoriale di R^4 di equazioni

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ 3x + y - 2z + 7t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

Si determini la dimensione di tale spazio.

2) Si trovi un sistema di equazioni per il sottospazio di R^4 generato dalle quaterne

$$(1, -1, 2, 1), (1, 0, 6, -1), (-1, 2, 2, -3)$$

e se ne stabilisca la dimensione.

3) Si trovi un sistema di equazioni per il sottospazio intersezione dei due sottospazi di R^3 di equazioni

$$2x + y - z = 0$$

il primo e

$$x + y + z = 0$$

il secondo. Dire inoltre quale è la dimensione dello spazio intersezione e trovarne una sua base.

4) Si trovi una base per il sottospazio unione dei due sottospazi di R^3 di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Successivamente si trovi un sistema di equazioni per il sottospazio unione

Soluzioni

1)
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

I quattro minori di ordine tre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

sono nulli mentre il minore di ordine due

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

è non nullo. Pertanto il rango della matrice dei coefficienti è 2 e la dimensione del sottospazio è $n-p = 4-2 = 2$. *Per trovare una base per le soluzioni del sistema basta trovare un sistema fondamentale di autosoluzioni*

$$\begin{cases} x+y-t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \end{cases}$$

portando a secondo membro la x *e la* t*:*

$$\begin{cases} y=-x+t \\ y-z=-2x-3t \end{cases}$$

e dando alla x *ed alla* t *rispettivamente i valori 1,0, una volta, e i valori 0,1 la seconda volta, si ottiene il sistema fondamentale di soluzioni seguente*

$$(1,-1,1,0),(0,1,4,1)$$

2)

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ha rango due. La dimensione del sottospazio $\langle(1,-1,2,1),(1,0,6,-1),(-1,2,2,-3)\rangle$ *è due. Una base per tale sottospazio è data da due qualunque quaterne indipendenti delle tre. Le due quaterne* $(1,-1,2,1),(1,0,6,-1)$ *sono indipendenti poiché la loro matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango due. Ogni altra quaterna del sottospazio generato dalle tre quaterne (e quindi anche dalle sole due quaterne che ne costituiscono una base) deve essere loro combinazione lineare e quindi linearmente dipendente con le due quaterne della base. La condizione necessaria e sufficente affinché una quaterna (x^1,x^2,x^3,x^4) *sia linearmente dipendente con le quaterne della base è che la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

abbia rango due. Ciò equivale all'annullarsi di tutti i quattro minori di ordine tre ossia al fatto che la quaterna (x^1, x^2, x^3, x^4), sia soluzione del seguente sistema omogeneo di equazioni lineari

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = -8x^2 - x^3 - 6x^4 = 0 \\
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ x^1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = -8x^1 + 2x^3 + 4x^4 = 0 \\
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x^1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = x^1 + 2x^2 + x^4 = 0 \\
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = -6x^1 - 4x^2 + x^3 = 0
\end{array}\right.$$

3)

Le terne che si trovano nel primo sottospazio sono le soluzione dell'equazione

$$2x + y - z = 0$$

Le terne che si trovano nel secondo sottospazio sono le soluzioni dell'equazione

$$x + y + z = 0$$

Le terne che si trovano in entrambi i sottospazi, le terne del sottospazio intersezione, sono le soluzioni di entrambe le equazioni e quindi le soluzioni del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$$

Tale sistema ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango due. Pertanto la dimensione del sottospazio intersezione è $n - p = 3-2 = 1$. Una base per tale sottospazio è data da una qualunque soluzione non nulla del sistema. Ad esempio la soluzione che si ottiene prendendo i minori a segno alterno della matrice dei coefficienti

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2, -3, 3)$$

4)

Il sottospazio unione dei due sottospazi è il sottospazio generato dai vettori dei due sottospazi. Ciò equivale a dire che è il sottospazio generato dai vettori di due qualunque basi dei due sottospazi. Una base per il primo sottospazio è data dalla terna dei tre minori a segni alterni della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni del primo sottospazio

$$(-1, 1, 2)$$

Una base per i vettori del secondo sottospazio è data anch'essa dalla terna dei minori a segni alterni della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni del secondo sottospazio

$$(1, -1, 0)$$

Dunque un sistema di generatori del sottospazio unione è dato dalle due terne

$$(-1, 1, 2)\,, (1, -1, 0)$$

Ma tali terne sono indipendenti e quindi costituiscono una base per lo spazio unione. Una generica terna dello spazio si troverà nel sottospazio unione se e solo se sarà linearmente dipendente con tali due terne ovvero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

E' questa un'equazione lineare omogenea che caratterizza le terne del sottospazio unione.

4. Esercizi sui cambiamenti di base.

1) Date le due coppie di coppie

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, -1), \mathbf{e}_2 = (1, 1)\}\,, \{\mathbf{f}_1 = (1, 2), \mathbf{f}_2 = (1, 0)\}$$

i) Verificare che tanto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, quanto $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, formano una base di R^2.

ii) Trovare le formule di cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ alla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, e dalla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

iii) Trovare le formule di cambiamento di coordinate dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, alla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

iv) Stabilire se esistono vettori che hanno le stesse coordinate nelle due basi.

2) Si supponga che la coppia $\mathbf{x}=(3, 1)$ abbia $(1, 1)$ come coppia delle coordinate in una certa base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, e che la coppia $\mathbf{y}=(0, -1)$, nella base

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, *abbia per coordinate* $(-1, 1)$. *Trovare le due coppie che costituiscono la base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

3) Siano

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 - x^2 \\ y^2 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

le formule di cambiamento di coordinate dalla base canonica di R^2 *ad un'altra base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. *Trovare la base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$

Soluzioni

1)

i)Le basi di R^2 *sono date dalle coppie di coppie indipendenti. Siccome tanto la matrice che ha come righe le due coppie* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *quanto la matrice che ha come righe le due coppie* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, *hanno determinante diverso da zero, entrambe le coppie di coppie sono indipendenti e quindi formano due basi di* R^2.

ii) Le formule di cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *alla base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, *sono del tipo*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = \gamma\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

e per calcolarle bisogna calcolare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. *Esplicitando la prima uguaglianza si ottiene*

$$(1, 2) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha + \beta \end{cases}$$

Analogamente esplicitando la seconda uguaglianza si ottiene

$$(1, 0) = \gamma(1, -1) + \delta(1, 1)$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = \gamma + \delta \\ 0 = -\gamma + \delta \end{cases}$$

Risolvendo i sistemi si trova

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{2}$$

quindi le formule di cambiamento di base sono

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

La matrice del cambiamento di base è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le formule del cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ *alla base* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. *saranno analoghe ma con la matrice inversa della matrice trovata.L'inversa della matrice trovata è*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

pertanto le formule cercate sono

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = -\mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \end{cases}$$

iii) Le formule di cambiamento di coordinate indotte dal cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *alla base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ *sono date dalla trasformazione lineare che ha come matrice l'inversa della matrice del cambiamento di base ovvero la matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi sono

$$\begin{cases} x^{'} = -x - y \\ y^{'} = -3x - y \end{cases}$$

iv) Per i vettori con le stesse coordinate relativamente alle due basi, deve avvenire che risulti $x^{'} = x, y^{'} = y$ *e quindi*

$$\begin{cases} x = -x - y \\ y = -3x - y \end{cases}$$

ovvero, portando tutto ad un membro,

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite con matrice dei coefficienti a determinante diverso da zero. L'unica soluzione è quella nulla e si conclude che l'unica coppia che ha coordinate uguali relativamente alle due basi è la coppia nulla.

2)

Le formule di cambiamento di coordinate nel passaggio dalla base canonica, nella quale gli elementi delle coppie sono anche coordinate, alle coordinate nella base cercata, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$*, sono del tipo*

$$\begin{cases} x^{'} =^{'} c_1^1 x +^{'} c_2^1 y \\ y^{'} =^{'} c_1^2 x +^{'} c_2^2 y \end{cases}$$

dove

$$\begin{pmatrix} {}^{'}c_1^1 & {}^{'}c_2^1 \\ {}^{'}c_1^2 & {}^{'}c_2^2 \end{pmatrix}$$

è la matrice inversa della matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$*. D'altronde le formule del cambiamento di coordinate debbono trasformare la coppia* $(3, 1)$*, delle coordinate di* $\mathbf{x}$ *nella base canonica, nella coppia* $(1, 1)$ *delle cordinate sempre di* $\mathbf{x}$ *nella base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ *e la coppia* $(0, -1)$ *delle coordinate di* $\mathbf{y}$ *nella base canonica, nella coppia* $(-1, 1)$ *delle coordinate di* $\mathbf{y}$ *nella base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$*. Pertanto si dovrà avere tanto*

$$\begin{cases} 1 =^{'} c_1^1 3 +^{'} c_2^1 1 \\ 1 =^{'} c_1^2 3 +^{'} c_2^2 1 \end{cases}$$

quanto

$$\begin{cases} -1 =^{'} c_1^1 0 +^{'} c_2^1 (-1) \\ 1 =^{'} c_1^2 0 +^{'} c_2^2 (-1) \end{cases}$$

Tali condizioni danno luogo al sistema

$$\begin{cases} 1 =^{'} c_1^1 3 +^{'} c_2^1 1 \\ 1 =^{'} c_1^2 3 +^{'} c_2^2 1 \\ -1 =^{'} c_1^1 0 +^{'} c_2^1 (-1) \\ 1 =^{'} c_1^2 0 +^{'} c_2^2 (-1) \end{cases}$$

che è un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite ${}'c_1^1, {}'c_2^1, {}'c_1^2, {}'c_2^2$. *La matrice dei coefficienti di tale sistema è la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è -9 *dunque diverso da zero. Si tratta di un sistema di Cramer la cui soluzione è*

$${}'c_1^1 = 0,\ {}'c_2^1 = 1,\ {}'c_1^2 = \frac{2}{3},\ {}'c_2^2 = -1$$

La corrispondente matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Come si vede si tratta di una matrice invertibile in quanto il suo determinante è $-\frac{2}{3}$, *diverso da zero. Possiamo calcolare l'inversa*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. *Dunque le formule di cambiamento di base, che forniscono i vettori cercati della nuova base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, *sono*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Ovvero risulta $\mathbf{f}_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $\mathbf{f}_2 = (1, 0)$.

3)3) Siano

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 - x^2 \\ y^2 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

le formule di cambiamento di coordinate dalla base canonica di R^2 *ad un'altra base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. *Trovare la base* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$

Si ragiona come nel cas precedente. La matrice delle formule di cambiamento di coordinate dalla base canonica alla base incognita $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, *è*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La sua inversa, ossia la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

è la matrice del cambiamento di base. Dunque la nuova base sarà

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

5. Esercizi sulle trasformazioni lineari

1) Si consideri la trasformazione lineare

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 - x^2 + x^3 \\ y^2 = x^1 + x^2 + x^3 \end{cases}$$

i) Si calcoli la matrice della trasformazione lineare.
ii) Si calcoli la dimensione dell'immagine
iii) Si trovi una base per l'immagine.
iv) Si trovino le immagini dei vettori della base canonica
v) Si calcolino le equazioni del nucleo.
vi) Si trovi una base per il nucleo.

2) Si risponda alle domande dl precedente esercizio in relazione alla trasformazione lineare

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 \\ y^2 = -x^1 + x^2 \\ y^3 = -x^1 - x^2 \end{cases}$$

Si stabilisca inoltre se la terna $(1,1,1)$ *è, o meno, nell'immagine.*

3) Sia $L : R^2 \longrightarrow R^3$ *la trasformazione lineare per la quale risulta*

$$\begin{aligned} L(1,0) &= (1,1,1) \\ L(0,1) &= (1,-2,1) \end{aligned}$$

i) Calcolare la matrice di L.
ii) Calcolare L *sulla coppia* $(4,3)$

4) Ripetere il precedente esercizio a partire dalla trasformazione lineare $L : R^2 \longrightarrow R^3$ *definita dalla condizione*

$$\begin{aligned} L(2,3) &= (1,1,1) \\ L(1,2) &= (1,-2,1) \end{aligned}$$

Soluzioni

1)

i) La matrice richiesta è la matrice dei coefficienti delle varaiabili

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) La dimensione di Im(L), sottospazio immagine di L, ò uguale al rango della matrice di L

$$\dim Im(L) = rg \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

iii) Una base per il sottospazio Im(L) è data da un sistema di generatori indipendenti di Im(L) in numero massimo. Un sistema di generatori di Im(L) è dato dalle colonne della matrice di L. Una base sarà data da una qualunque coppia di colonne indipendenti della matrice di L. Ad esempio dalle due colonne

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iv) Le immagini dei vettori della base canonica sono date dalle colonne della matrice di L. Precisamente

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v) Le equazioni del nucleo si ottengono ponendo uguali a zero le y delle equazioni della trasformazione lineare

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

vi) Una base per il nucleo è data da un sisteme fondamentale di autosoluzioni del sistema omogeneo che dàle equazioni del nucleo. Nel nostro caso il sistema omogeneo in questione è un sistema di due equazioni in tre incognite di rango due. Un sistema fondamentale di autosoluzioni è dato da $n - p = 3 - 2 = 1$ *soluzioni indipendenti quindi da una qualunque soluzione non nulla. Una tale soluzione non nulla si può ottenere prendendo i tre minori di ordine due della matrice, con i segni alterni*

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\right)$$

2)
i) La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) La dimensione dell'immagine è

$$\dim Im(L) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

iii) Una base per l'immagine è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

iv) Le immagini dei vettori della base canonica sono

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v) Le equazioni del nucleo sono

$$\begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ -x^1 + x^2 = 0 \\ -x^1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

vi) Il nucleo in questo caso ha dimensione zero (si riduce al solo elemento nullo) poiché $n - p = 2 - 2 = 0$.

Infine per vedere se la terna $(1, 1, 1)$ *è, o meno, nell'immagine basta vedere se tale terna è o meno linearmente dipendente con i vettori della base trovata per il sottospazio immagine. Per fare questo si può vedere se il rango della matrice avente per colonne le terne della base dell'immagine e la terna assegnata ha rango uguale alla dimensione dell'immagine. Se il rango è uguale alla dimensione dell'immagine questo vuol dire che che la terna in questione è linearmente dipendente con i vettori della base e che quindi si trova nel sottospazio immagine. Altrimenti la terna non si trova nell'immagine. La matrice avente per colonne le terne della base trovata e la terna assegnata è*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

La terna $(1, 1, 1)$, *non è nell'immagine.*

3)

i) La matrice di L è la matrice che ha per colonne i valori di L sui vettori della base canonica del suo dominio. Tali valori sono $(1, 1, 1)$ *e* $(1, -2, 1)$ *pertanto la matrice è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Le equazioni di L sono date dalla trasformazione lineare che ha come matrice la matrice di L

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^1 - 2x^2 \\ y^3 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

Per trovare il valore di L sulla coppia $(4, 3)$ *basterà sostituire alle x i valori della coppia. Si trova in tal modo*

$$\begin{cases} y^1 = 4 + 3 = 7 \\ y^2 = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \\ y^3 = 4 + 3 = 7 \end{cases}$$

Ossia $L(4, 3) = (7, 2, 7)$

4)

Ora le terne assegnate come valori non sono più le colonne della matrice di L. Questo perché sono i valori di L non sulla base canonica ma su di un'altra base: quella costituita dalle due coppie indipendenti $(2, 3), (1, 2)$. *Una maniera per trovare la matrice richiesta in questa situazione, consiste nell'esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base sulla quale sono stati dati i valori di L. In altre parole nel calcolare le formule di cambiamento di base dalla base* $\{(2, 3), (1, 2\}$ *alla base canonica. Noi sappiamo che risulta*

$$\begin{cases} (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1) \\ (1, 2) = (1, 0) + 2(0, 1) \end{cases}$$

Quindi che la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{(2, 3), (1, 2\}$, *è data dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto il cambiamento di base inverso avrà come matrice la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

e risulterà dato dalle formule

$$\begin{cases} (1,0) = 2(2,3) - 3(1,2) \\ (0,1) = -(2,3) + 2(1,2) \end{cases}$$

Usando queste formule e la linearità di L, troviamo

$$\begin{aligned} L(1,0) &= 2L(2,3) - 3L(1,2) \\ L(0,1) &= -L(2,3) + 2L(1,2) \end{aligned}$$

Da queste sostituendo i valori assegnati di L sulla base $\{(2,3),(1,2\}$, *si ricava*

$$\begin{aligned} L(1,0) &= 2L(2,3) - 3L(1,2) = 2(1,1,1) - 3(1,-2,1) = (-1,8,-1) \\ L(0,1) &= -L(2,3) + 2L(1,2) = -(1,1,1) + 2(1,-2,1) = (1,-5,1) \end{aligned}$$

Ora possiamo dire che la matrice di L è la matrice che ha per colonne le due terne trovate

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Le equazioni della trasformazione lineare saranno

$$\begin{cases} y^1 = -x^1 + x^2 \\ y^2 = 8x^1 - 5x^2 \\ y^3 = -x^1 + x^2 \end{cases}$$

Il valore della trasformazione lineare sulla coppia $(4,3)$ *sarà*

$$\begin{cases} y^1 = -4 + 3 = -1 \\ y^2 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 17 \\ y^3 = -4 + 3 = -1 \end{cases}$$

6. Esercizi sugli autovalori e sugli autovettori.

1) Per ognuna delle seguenti trasformazioni lineari, si calcolino gli eventuali autovalori, per ogni autovalore si calcolino le equazioni del corrispondente autospazio, per ogni autospazio si calcoli una base.

i) $L : R^2 \longrightarrow R^2$

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^1 - x^2 \end{cases}$$

ii) $L : R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 - x^3 \\ y^2 = x^2 + x^3 \\ y^3 = -x^3 \end{cases}$$

iii) $L : R^4 \longrightarrow R^4$

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^1 - x^2 \\ y^3 = x^3 + 2x^4 \\ y^4 = x^3 + x^4 \end{cases}$$

iv) $L : R^2 \longrightarrow R^2$

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 \\ y^2 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

2) Per ognuna delle precedenti trasformazioni lineari si determini una base dello spazio, su cui la trasformazione è definita, nella quale i primi vettori siano ottenuti unendo le basi trovate nei diversi autospazi. Si calcoli poi la matrice della corrispondente trasformazione nella base in questione e si scrivano le equazioni della trasformazione lineare sempre in tale base.

3) Si calcolino gli eventuali autovalori ed i corrispondenti autospazi delle trasformazioni lineari definite al modo seguente:

i) $L : R^2 \longrightarrow R^2$

$$\begin{aligned} L(1,1) &= (2,1) \\ L(2,1) &= (1,1) \end{aligned}$$

ii) $L : R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{aligned} L(1,0,1) &= (-1,2,1) \\ L(1,1,0) &= (-1,2,1) \\ L(0,1,1) &= (-1,2,1) \end{aligned}$$

iii) $L : R^4 \longrightarrow R^4$

$$\begin{aligned} L(1,0,0,0) &= 2L(0,1,0,0) \\ L(0,1,0,0) &= -L(0,0,1,0) \\ L(0,0,1,0) &= L(0,0,0,1) - 2L(1,0,0,0) \\ L(0,0,0,1) &= -L(1,0,0,0) \end{aligned}$$

4) Dire quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile ed in tal caso trovare la sua forma diagonale ed una matrice che la diagonalizza.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzioni

1)

Gli autovalori di L sono dati dalle radici reali del polinomio caratteristico della matrice di L. Tali polinomi e le relative radici, sono rispettivamente dati da *i)*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \\ \lambda_1 &= \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - 2\right)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] \\ \lambda_1 &= \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2 \end{aligned}$$

iv)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

non vi sono radici reali

Passiamo al calcolo degli autospazi e per ogni autospazio al calcolo di una base. Si tratterà di sostituire nella matrice $A-\lambda\Delta$ l'autovalore corrispondente all'autospazio che si vuole calcolare, poi di considerare il sistema omogeneo che ha tale matrice come matrice dei coefficienti, poi ancora di trascurare le equazioni dipendenti ed infine, del sistema così ottenuto, calcolare un sistema fondamentale di autosoluzioni.

i)

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{2}} &: (1-\sqrt{2})x^1 + x^2 = 0 \qquad \mathbf{F}_{\sqrt{2}} = \mathbf{f}_1 = \left\{(-1, 1-\sqrt{2})\right\} \\ V_{-\sqrt{2}} &: (1+\sqrt{2})x^1 + x^2 = 0 \qquad \mathbf{F}_{-\sqrt{2}} = \left\{\mathbf{f}_1 = (-1, 1+\sqrt{2})\right\} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} V_1 &: \begin{cases} x^2 - x^3 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{F}_1 = \{\mathbf{f}_1 = (1,0,0)\} \\ V_{-1} &: \begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ 2x^2 + x^3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{F}_{-1} = \{\mathbf{f}_1 = (3,-2,4)\} \end{aligned}$$

iii)

$$V_{\sqrt{2}} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\sqrt{2})x^1 + x^2 = 0 \\ (1-\sqrt{2})x^3 + x^4 = 0 \\ x^3 + (1-\sqrt{2})x^4 = 0 \end{array} \right. \qquad \mathbf{F}_{\sqrt{2}} = \left\{ \mathbf{f}_1 = (1, -1+\sqrt{2}, 0, 0) \right\}$$

$$V_{-\sqrt{2}} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+\sqrt{2})x^1 + x^2 = 0 \\ (1+\sqrt{2})x^3 + x^4 = 0 \\ x^3 + (1+\sqrt{2})x^4 = 0 \end{array} \right. \qquad \mathbf{F}_{-\sqrt{2}} = \left\{ \mathbf{f}_1 = (1, -1-\sqrt{2}, 0, 0) \right\}$$

$$V_0 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} x^1 + x^2 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 + x^4 = 0 \end{array} \right. \qquad \mathbf{F}_0 = \{ \mathbf{f}_1 = (0, 0, -1, 1) \}$$

$$V_2 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} -x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - 3x^2 = 0 \\ -x^3 + x^4 = 0 \end{array} \right. \qquad \mathbf{F}_2 = \{ \mathbf{f}_1 = (0, 0, 1, 1) \}$$

iv) Non vi sono autospazi e quindi non vi sono autovettori.

2)

i) Lo spazio in cui è definita la trasformazione lineare è R^2. Una base sarà data da due coppie indipendenti. Prendendo come prima coppia la base trovata del primo autospazio, $(-1, 1-\sqrt{2})$, e come seconda coppia la base trovata per il secondo autospazio, $(-1, 1+\sqrt{2})$, si ottengono le due coppie indipendenti, $(-1, 1-\sqrt{2}), (-1, 1+\sqrt{2})$, che costituiscono la base cercata: $\mathbf{G} = \left\{ \mathbf{g}_1 = (-1, 1-\sqrt{2}), \mathbf{g}_2 = (-1, 1+\sqrt{2}) \right\}$. La matrice, C, del cambiamento di base, dalla base canonica di R^2 alla base $\mathbf{G}$, è la matrice le cui colonne sono le due coppie

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice della trasformazione lineare nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente la matrice della stessa trasformazione nella base $\mathbf{G}$, sarà

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Indicate con (v^1, v^2) *le coordinate di una coppia generica* (x^1, x^2) *nella base* $\mathbf{G}$ *e con* (w^1, w^2) *le coordinate della sua immagine sempre relative alla base* $\mathbf{G}$*, le equazioni della trasformazione lineare nella base* $\mathbf{G}$*, si scriveranno*

$$\begin{aligned} w^1 &= \sqrt{2}v^1 \\ w^2 &= -\sqrt{2}v^2 \end{aligned}$$

ii) Questa volta prendendo la base trovata per il primo autospazio, $(1, 0, 0)$*, e mettendola assieme con la base trovata per il secondo autospazio,* $(3, -2, 4)$*, si trovano solo due vettori indipendenti che non costituiscono una base per* R^3*. Pertanto per ottenere la base richiesta si dovrà aggiungere ai due autovettori un arbitrario vettore che però risulti indipendente dai primi due. Un tale vettore è dato, ad esempio, dalla terna* $(0, 0, 1)$ *e come base si potrà prendere la base* $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{g}_2 = (3, -2, 4), \mathbf{g}_3 = (0, 0, 1)\}$*. La matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base* $\mathbf{G}$*, è la matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa di tale matrice è la matrice

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome la matrice di L nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice di L nella base $\mathbf{G}$*, sarà*

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni di L nella base $\mathbf{G}$*, facendo uso di simboli analoghi a quelli usati nel caso precedente, saranno*

$$\begin{cases} w^1 = v^1 \\ w^2 = -v^2 - \frac{1}{2}v^3 \\ w^3 = v^3 \end{cases}$$

iii) Il terzo caso è analogo al primo poiché mettendo assieme una base per ogni autospazio si trovano quattro vettori indipendenti che costituiscono una base di autovettori. In tale base la matrice di L sarà

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente le equazioni di L nella base di autovettori saranno

$$\begin{cases} w^1 = \sqrt{2}v^1 \\ w^2 = -\sqrt{2}v^2 \\ w^3 = 0 \\ w^4 = 2v^4 \end{cases}$$

iv) In quest'ultimo caso non vi sono autovettori. La condizione di prendere una base in cui i primi vettori siano autovettori è una condizione vuota e si può prendere una base qualunque. Ad esempio la base canonica nella quale la matrice di L è nota. Si tratta della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni della trasformazione lineare saranno

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 \\ y^2 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

3)

i) I due vettori $(1,1)$ *e* $(2,1)$*, sono indipendenti e costituiscono quindi una base,*

$\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1 = (1,1), \mathbf{g}_2 = (2,1)\}$ *per lo spazio. Siccome per la definizione stessa risulta*

$$\begin{cases} L(\mathbf{g}_1) = L(1,1) = (2,1) = 0\mathbf{g}_1 + 1\mathbf{g}_2 \\ L(\mathbf{g}_2) = L(2,1) = (1,1) = 1\mathbf{g}_1 + 0\mathbf{g}_2 \end{cases}$$

si deduce che la matrice della trasformazione nella base $\mathbf{G}$ *è*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di L possono essere calcolati a partire dalla matrice della trasformazione relativa ad una base qualunque. Possiamo quindi prendere *la matrice A, scriverne il polinomio caratteristico e calcolarne le eventuali radici reali. Abbiamo*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \\ \lambda_1 &= 1, \, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

I corrispondenti autospazi avranno come equazioni, i sistemi lineari omogenei la cui matrice dei coefficienti è la matrice $A - \lambda\Delta$ in cui λ venga sostituito con l'autovalore dell'autospazio che si intende calcolare. Più precisamente avranno equazioni ottenute da detto sistema, ridotto alle equazioni indipendenti.

$$\begin{aligned} V_1 &: \; -v^1 + v^2 = 0 \\ V_{-1} &: \; v^1 + v^2 = 0 \end{aligned}$$

Si noti però che queste sono le equazioni dei due autospazi in termini di coordinate (v^1, v^2) della coppia generica $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ nella base $\mathbf{G}$ in cui è stata calcolata la matrice della trasformazione. L'autospazio V_1 è fatto dai vettori del tipo $v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2$ con $v^1 = v^2$ ovvero del tipo $\rho(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2)$. Sono tutti vettori proporzionali a $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$. Analogamente si vede che i vettori del secondo autospazio sono tutti vettori proporzionali a $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$.

ii) In questo esercizio i tre vettori $\mathbf{g}_1 = (1,0,1), \mathbf{g}_2 = (1,1,0), \mathbf{g}_3 = (0,1,1)$ costituiscono una base ma non si ha l'espressione del vettore $(-1,2,1)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Calcoliamo l'espressione di $(-1,2,1)$ come combinazione lineare di $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$.

$$(-1,2,1) = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,0) + \nu(0,1,1)$$

Esplicitando si trova

$$\begin{cases} -1 = \lambda + \mu \\ 2 = \mu + \nu \\ 1 = \lambda + \nu \end{cases}$$

La soluzione è

$$\lambda = -1, \mu = 0, \nu = 2$$

Dunque

$$(-1,2,1) = -(1,0,1) + 2(0,1,1) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_3$$

Da questa espressione deduciamo

$$\begin{cases} L(\mathbf{g}_1) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_3 \\ L(\mathbf{g}_2) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_3 \\ L(\mathbf{g}_3) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_3 \end{cases}$$

e la matrice della trasformazione lineare nella base **G** *sarà data dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori saranno le radici reali del polinomio

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\Delta) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\lambda^2 - \lambda\right] = -\lambda^2(\lambda - 1) \\ \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Le equazioni degli autospazi nella base **G** *saranno*

$$\begin{aligned} V_0 &: v^1 + v^2 + v^3 = 0 \\ V_1 &: \begin{cases} v^2 + v^3 = 0 \\ -v^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

iii) In tale esercizio sono assegnati i valori di L sui vettori della base canonica, ma tali valori non sono assegnati esplicitamente come combinazioni lineari dei vettori della base canonica. Anche ora bisogna fare dei ragionamenti che riconducano al caso di valori assegnati sulla base canonica espressi come combinazioni lineari dei vettori della base canonica.

Indichiamo al solito la matrice, incognita, della trasformazone lineare, con

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{pmatrix}$$

Si ricordi che le colonne di tale matrice sono i valori della trasformazione sui vettori della base canonica:

$$\begin{aligned} L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \\ a_1^4 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \\ a_3^4 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4^1 \\ a_4^2 \\ a_4^3 \\ a_4^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni scritte troviamo

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \\ a_1^4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \\ a_3^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \\ a_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4^1 \\ a_4^2 \\ a_4^3 \\ a_4^4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \\ a_1^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_4^1 \\ a_4^2 \\ a_4^3 \\ a_4^4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \\ a_1^4 \end{pmatrix}$$

Ognuna di queste uguaglianze tra quaterne corrisponde a quattro uguaglianze tra numeri. In tutto si ha un sistema omogeneo di 16 equazioni in 16 incognite: le a_j^i. Visto che i sistemi omogenei sono sempre compatibili possiamo sin da ora dedurre che una trasformazione lineare che soddisfa la condizioni scritte esiste sicuramente, ma se tale sistema risulterà anche determinato la trasformazione lineare dovrà coincidere con quella nulla, mentre in caso contrario esisteranno oltre alla trasformazione lineare nulla anche altre trasformazioni lineari verificanti le condizioni imposte ed ognuna di esse avrà una sua matrice. Per sapere in quale delle due situazioni di fatto ci troviamo vediamo di risolvere il sistema. Usando la prima, la seconda, la quarta uguaglianza tra quaterne otteniamo intanto

$$\begin{pmatrix} 2a_2^1 & a_2^1 & a_2^1 & 2a_2^1 \\ 2a_2^2 & a_2^2 & a_2^2 & 2a_2^2 \\ 2a_2^3 & a_2^3 & a_2^3 & 2a_2^3 \\ 2a_2^4 & a_2^4 & a_2^4 & 2a_2^4 \end{pmatrix}$$

Dalla terza uguaglianza tra quaterne, nella quale di nuovo si tenga conto della quarta e della prima uguaglianza, si trova

$$\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix}$$

e da questa si deduce

$$\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto
$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ovvero la trasformazione lineare L è la trasformazione lineare nulla. I suoi autovalori sono il solo autovalore nullo, mentre tutti i vettori dello spazio sono autovettori associati a tale autovalore.

4)

Prima di cominciare a risolvere l'esercizio, ricordiamo che

a) una matrice, A, è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile, C, tale che la matrice $C^{-1}AC$, risulti diagonale.

b) Se una matrice A è diagonalizzabile una matrice C che la diagonalizza è una matrice le cui colonne sono autovettori indipendenti della trasformazione lineare che ha la matrice A come matrice associata.

i) Il polinomio caratteristico della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
è
$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$
e le sue radici saranno $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Si tratta di due radici reali distinte. Quando una matrice di ordine n ha n radici reali distinte l'operatore che ha la matrice data come matrice associata ha n autospazi distinti, ognuno di dimensione uno. Quindi esiste una base tutta fatta da autovettori.. La matrice che ha per colonne tali autovettori sarà una matrice che diagonalizza la matrice data e detta matrice è una matrice diagonalizzabile. Pertanto nel nostro caso la matrice è diagonalizzabile. Calcoliamo una base per ogni autospazio
$$\begin{array}{ll} V_2 : -x^1 + x^2 = 0 & \mathbf{f}_1 = (1, 1) \\ V_0 : x^1 + x^2 = 0 & \mathbf{f}_2 = (1 - 1) \end{array}$$
Una matrice che diagonalizza la matrice assegnata è la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ma evidentemente ogni altra matrice avente per colonne i vettori di una base di autovettori, avrebbe diagonalizzato la stessa matrice.

ii) Passiamo alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice è una matrice triangolare. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Pertanto gli autovalori sono uno solo: 1. Vi sono due possibilità: o l'autospazio associato a tale autovalore ha dimensione tre, ed in tal caso prendendo una base in tale autospazio si avrà una base di autovettori per tutto lo spazio e conseguentemente la matrice assegnata risulterà diagonalizzabile, oppure la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1 ha dimensione minore di tre ed in tal caso non esiste una base di autovettori per tutto lo spazio e la matrice non è diagonalizzabile. Per decidere in quale delle due situazioni ci troviamo dobbiamo calcolare le equazioni dell'autospazio associato ad 1. Queste sono

$$\begin{cases} 0x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 + x^3 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + x^3 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni. Ossia la dimensione dell'autospazio associato ad 1 è uno. La matrice non è diagonalizzabile.

iii) Per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si ripete la situazione presentatasi nel primo caso. Si tratta di una matrice triangolare. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Tali elementi sono quattro e sono tutti distinti. Pertanto, per la regola esposta nel primo caso, la matrice è diagonalizzabile. Può essere diagonalizzata prendendo la matrice che ha per colonne gli elementi delle quattro basi dei quattro autospazi, tutti unidimensionali. Le equazioni dei quattro autospazi *sono*

$$V_1 : \begin{cases} x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ -2x^3 + x^4 = 0 \\ -3x^4 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} -x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^3 + x^4 = 0 \\ -3x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

$$V_{-1} : \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ 3x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

$$V_{-2} : \begin{cases} 3x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ 4x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

Basi corrispondenti sono

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{f}_2 &= (1, 1, 0, 0) \\ \mathbf{f}_3 &= (1, 1, -3, 0) \\ \mathbf{f}_4 &= (0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

Una matrice che diagonalizza la matrice assegnata è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$