Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Sia r la retta passante per i punti $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0}\,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e s la retta passante per $C \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ di direzione $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare la posizione reciproca di r ed s.
b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s.
c) Determinare la distanza tra π ed s.

a) direzione di r $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

direzione di s $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 & x_3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad -5(x_1 - 1) + 4(x_2 - 1) + 2x_3 = \dots$

$5x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 1 = 0$

c) $d(\pi, s) = d(\pi, C) = \dfrac{1}{\sqrt{25 + 16 + 4}} = \dfrac{1}{\sqrt{45}}$

(*) Nota: risolvendo il sistema omogeneo associato a questa matrice si trovano le coordinate degli autovettori rispetto a $\mathcal{B}$ (non gli autovettori!)

Esercizio 2. Sia L l'operatore lineare su $\mathbb{R}^4$ rappresentato nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1)^t, (1,1,1,0)^t, (1,1,0,0)^t, (1,0,0,0)^t\}$, presa come base di partenza e arrivo, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare autovalori e autovettori per L.
b)Determinare equazioni cartesiane del sottospazio somma degli autospazi di L.
c) Determinare la forma canonica di Jordan di L.

a) $$\begin{vmatrix} -t & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -t & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 2 & -t \end{vmatrix}$$

$$= -(2-t)\,t \begin{vmatrix} -t & 0 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3(2-t)$$

$t=0$ $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (*)

$V_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t=2$ $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ sol. $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$

c) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Esercizio 3. Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
a) Dimostrare che esiste un unico operatore lineare $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$R(w) = w \quad \forall w \in W, \qquad R(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice di R rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$.
b) Dimostrare che R è un'isometria di $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard.
c) Dire, giustificando la risposta, se R è diagonalizzabile. Dire, giustificando la risposta, se R ammette una base di autovettori, ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

a) $W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Poiché $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti, sono una base di $\mathbb{R}^4$. Pertanto le condizioni

$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

~~Sia~~ Se $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base standard, risulta

$$A := {}_{\mathcal{E}}(R)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Poiché $A \in O(4)$, A è un'isometria (lineare)

c) A è simmetrica quindi è ~~R~~ è diagonalizzabile tramite una base ortonormale

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\}, \quad U_k = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - ky + z = 0\}.$$

(k è un parametro reale).
a) Determinare per quali valori di k risulta $\mathbb{R}^3 = W \oplus U_k$.
b) Per i valori di k per cui la somma non è diretta, determinare un isomorfismo esplicito $W \cap U_k \to \mathbb{R}^{\dim(W \cap U_k)}$.

Risulta $\dim W = 2$, $\dim U_k = 1$ $\forall k$, per cui $\mathbb{R}^3 = W \oplus U_k$ se e solo se $W \cap U_k = \{0\}$. $W \cap U_k$ ha equazioni $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x-ky+z=0 \end{cases}$

e la matrice del sistema ha determinante $5k-10$. Pertanto se $k \neq 2$ la somma è diretta

e se $k=2$ $\quad W \cap U_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'isomorfismo indotto $\varphi : W \cap U_2 \to \mathbb{R}$ è quindi

ovvero $\varphi\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t$

Esercizio 5. Sia $h_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ la forma sesquilineare su $\mathbb{C}^3$ definita dalla matrice

$$H_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -2i \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(in altri termini, $h_\lambda(X, Y) = X^t H_\lambda \overline{Y}$).
a) Determinare i valori di λ per cui h_λ è una forma Hermitiana.
b) Per i valori di λ determinati nel punto a), calcolare i valori di λ per cui h_λ è non degenere e quelli per cui h_λ è definita positiva.

a) $H_\lambda = \overline{H_\lambda}^t \iff \lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2i \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2i & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i \begin{vmatrix} 1 & -2i \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$

$= -4\lambda - \lambda^2 + 1$ $\qquad \lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$

$\iff \lambda = -2 \pm \sqrt{5}$

$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda^2 - 1 > 0 \\ -4\lambda - \lambda^2 + 1 > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda > 1 \\ \lambda^2 + 4\lambda - 1 < 0 \end{cases}$ $\qquad \emptyset$

H_λ non è mai definita positiva