23/01/06 Tracce delle soluzioni della prova di Algebra

Esercizio 1 a) Poiché

$25 = 17 \cdot 1 + 8$

$17 = 2 \cdot 8 + 1$

si ha $1 = 17 - 2 \cdot 8 = 17 - 2 \cdot (25 - 17)$

$= 3 \cdot 17 - 2 \cdot 25$

da cui $\bar{1} = \bar{3} \cdot \overline{17}$ e $\overline{17}^{-1} = \bar{3}$

b) $U_{23} = \{ \bar{a} \mid 1 \leq a \leq 22 \}$. Risulta $U_{23} = \langle \bar{5} \rangle \cong \mathbb{Z}_{22}$

Il reticolo dei sottogruppi è isomorfo a quello dei divisori di 22; dunque c'è un sottogruppo di ordine 11 ($\langle \bar{2} \rangle$) e uno di ordine 2 ($\langle \overline{22} \rangle$).

c) $U_{16} = \{ \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15} \}$

Risulta $\langle \bar{3} \rangle = \{ \bar{3}, \bar{9}, \overline{11}, \bar{1} \}$, $\langle \bar{5} \rangle = \{ \bar{5}, \bar{9}, \overline{13}, \bar{1} \}$,

$\langle \bar{7} \rangle = \{ 1, \bar{7} \}$ $\langle \bar{9} \rangle = \{ 1, \bar{9} \}$ $\langle \overline{15} \rangle = \{ \bar{1}, \overline{15} \}$

Questo prova che U_{16} non è ciclico e che i sottogruppi di ordine 4 sono $\langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{5} \rangle$ (ciclici) e $\{ \bar{1}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{15} \}$ (di Klein)

Esercizio 2 a) Si ha $\alpha = (1,5,2,4,7)$, $\beta = (1,6,7,3)$ dunque $o(\alpha) = 5$, $o(\beta) = 4$, $o(\gamma) = 12$. Ricordando che $\alpha^k = \alpha^{k \bmod (o(\alpha))}$ dobbiamo calcolare $\beta \gamma^9 = \beta (1,2,3)^9 (4,5,6,7)^9 =$

$= \beta (4,5,6,7) = (1,6,7,3)(4,5,6,7) = (1,6,3)(4,5,7)$

b) Le strutture cicliche sono in relazione con le partizioni di 7

7
6+1
5+2
5+1+1
4+3
4+2+1
4+1+1+1
3+3+1
3+2+1+1
3+1+1+1+1
2+2+2+1
2+2+1+1+1
2+1+1+1+1+1
1+1+1+1+1+1+1
3+2+2

c) Poiché $120 = 5!$, basta considerare

$$H = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(6) = 6,\ \sigma(7) = 7\} \cong S_5$$

<u>Esercizio 3</u> Per provare che W è un sottospazio si può usare la definizione oppure osservare che è definito da un sistema lineare omogeneo:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \right\}$$

Una base può essere $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Un completamento può effettuarsi coi vettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $W_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Rispetto alla base $\mathcal{B}$ i vettori di cui al punto b) hanno coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lo spazio che essi generano ha per base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $W_1 + W_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

W_1, W_2 hanno equazioni $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

dunque $W_1 \cap W_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 4 a) Risulta $F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$

$= F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

Dunque $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

b) Poiché $\det A \neq 0$, $\ker F = \{0\}$ e $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3$

c) Poiché A è triangolare, gli autovalori sono $1, -2$ con molteplicità algebrica $2, 1$ rispettivamente. Poiché

$m_g(1) = 3 - rg\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_a(1)$,

F non è triangolarizzabile.