Tracce delle soluzioni della prova del 25-11-2005

Esercizio 1 a) La matrice del sistema che definisce U_k è

$$\begin{pmatrix} k+2 & k & 2 \\ k & k-1 & 3-k \end{pmatrix}$$

ha rango almeno 1 per ogni k, dunque ha rango 1 quando si annullano tutti i minori di ordine 2 e rango 2 altrimenti. I minori di ordine 2 sono $k-2$, $6-k-k^2$, $2+k-k^2$, e si annullano contemporaneamente per $k=2$. Dunque

$$\dim U_k = \begin{cases} 2 & \text{per } k=2 \\ 1 & \text{per } k\neq 2 \end{cases}$$

b) Risulta $k_0 = 2$. Allora $U_{k_0} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $U_{k_0} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

c) Poiché $\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (essendo non proporzionali), $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di U_{k_0}

d) È chiaro che $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \in U_{k_0} \cap W$. Risulta

$W \cap U_{k_0} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ se e solo se $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$,

la qual cosa si verifica osservando che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Esercizio 2 a) Una matrice 3×3 è antisimmetrica se $A = -A^t$. Una generica matrice antisimmetrica 3×3 è

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

dunque le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

sono un insieme di generatori. Si verifica usando la definizione che sono anche linearmente indipendenti, dunque sono una base di V.

Un polinomio generico di W è del tipo $at+bt^2+ct^3$ dunque $\{t, t^2, t^3\}$ è una base di W.

b) Risulta $F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $F(t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$F(t^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dunque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Risolvendo il sistema omogeneo associato ad A si determinano coordinate rispetto alla base di partenza di una base del nucleo.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, per cui il sistema in questione è $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

che ha per soluzioni $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque $\operatorname{Ker} F = \mathbb{R}(t - t^2 + t^3)$

Dal teorema del rango deduciamo che

$$\dim \operatorname{Im} F = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F = 3 - 1 = 2$$

dunque due colonne non proporzionali di A forniscono coordinate rispetto alla base di ovvio di vettori costituenti una base di Im F. Possiamo scegliere le colonne $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, che sono coordinate delle matrici $\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

Esercizio 3 a) Risulta

$$F\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-9\\-2\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-9\\-1\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-9\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\4\end{pmatrix}$$

Pertanto $A=\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\8&-9&10&-9\\4&-2&2&-1\end{pmatrix}$. e $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

b) Dal teorema del rango un'applicazione lineare $F: V \to W$ con $\dim V > \dim W$ non può essere iniettiva. Risolvendo il sistema $AX=0$ si trova la soluzione $\begin{pmatrix}1\\12\\10\\0\end{pmatrix}$. Un completamento a una base di $\mathbb{R}^4$ può essere dato dai vettori $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.