Corso di laurea in Fisica. Prova di Geometria del 13-2-2013

Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Lo svolgimento di ciascun esercizio deve essere giustificato. Non si possono utilizzare testi o dispense. Sarà possibile svolgere la prova orale nelle mattine del 15 e 20 febbraio. Effettuare di seguito la scelta:

☐ orale 15 febbraio **☐ orale 20 febbraio**

Non scrivere nella parte sottostante. Risolvere tutti gli esercizi in due ore e mezzo.

1.

2.

3.

4.

5.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3.
a) Determinare equazioni vettoriali e cartesiane del piano π passante per il punto $A \equiv (1, 2, 3)^t$, parallelo alla retta individuata dai punti $B \equiv (1, 0, -2)^t$, $C \equiv (0, -3, 2)^t$ e ortogonale al piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 10$.
b) Determinare il valore del parametro k per cui la retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ ha distanza positiva da π.
c) Calcolare tale distanza.

Esercizio 2. Discutere la diagonalizzabilità della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 3. Sia V lo spazio delle matrici quadrate reali 3×3.
a) Dimostrare che l'insieme W delle matrici triangolari superiori a traccia nulla in V è un sottospazio vettoriale di V.
b) Verificare che un'applicazione lineare iniettiva $\mathbb{R}^k \to W$ è un isomorfismo se e solo se $k = 5$.
c) Esibire, se esiste, un isomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to W$ tale che

$$f((1,1,1,1,1)^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f((1,0,0,0,1)^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali U_1, U_2 di $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \mathcal{L}((1,0,1,-2)^t, (1,-2,0,0)^t, (0,2,1,2)^t)$$
$$U_2 = \mathcal{L}((0,1,1,1)^t, (1,2,1,2)^t, (1,0,1,-1)^t)$$

a) Calcolare una base di U_1 e equazioni cartesiane per U_2.
b) Calcolare una base di $U_1 \cap U_2$ e determinare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_1 + U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus W$.

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $g(X, Y) = X^t AY$ ove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli indici di g.
b) Determinare una base g-ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
c) Stabilire per quali valori reali di k esiste un'isometria lineare tra $(\mathbb{R}^4, g)$ e $(\mathbb{R}^4, p_k)$, ove

$$p_k((x_1, x_2, x_3, x_4)^t, (y_1, y_2, y_3, y_4)^t) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - kx_4y_4.$$