Algebra 2, Prof. Papi, Quarto foglio di esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che un omomorfismo di campi è zero o iniettivo.

Esercizio 2. Sia K un campo di caratteristica p; dimostrare che la mappa di Frobenius è un endomorfismo, che se K è finito è un automorfismo e che se K ha p elementi è l'identità.

Esercizio 3. Dimostrare che se R è un dominio di integrità che è anche uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, allora R è un campo.

Esercizio 4. Sia $f(x) = x^4 + x^3 - 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Determinare in numero dei divisori di zero e l'inverso di $\overline{x+1}$ in $\mathbb{Z}_7[x]/(f(x))$.

Esercizio 5. Sia $f(x) = x^6 + 4x^3 + 2$. Se β è una radice complessa di $f(x)$, determinare il polinomio minimo di $1/\beta^2$ su $\mathbb{Q}$. Determinare poi il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Z}_7$

Esercizio 6. Sia $x = \sqrt{2+\sqrt{7}}$. Determinare $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ e il grado del campo di spezzamento del polinomio minimo di x sui razionali