Algebra 2, Prof. Papi, Secondo foglio di esercizi

Esercizio 1. Trovare tutti i 3-Sylow di S_5

Esercizio 2. Dimostrare che i gruppi di ordine $12, 28, 56$ non sono semplici.

Esercizio 3. Dimostrare che che $AutS_4 \cong S_4$ (si usi l'azione di un automorfismo sui 3-Sylow)

Esercizio 4. Se P è un p-Sylow allora $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ ($N_G(P)$ è il normalzzatore di P in G).

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione d su $\mathbb{Z}_p$ e sia $G \leq Aut_{\mathbb{Z}_p}(V), |G| = p^n$. Dimostrare che esiste $0 \neq v \in V$ tale che $Av = v$ per ogni $A \in G$

Esercizio 6. Dimostrare che se un gruppo finito ha un 2-Sylow ciclico non banale allora ha un sottogruppo di indice 2.