Algebra 2, Prof. Papi, Primo foglio di esercizi

Esercizio 1. Scrivere tutte le serie di composizione di $\mathbb{Z}_{30}$ e verificare che sono equivalenti

Esercizio 2. Se G è un gruppo ciclico di ordine $p_1 \cdots p_r$, p_i primi distinti, dimostrare che g ha $r!$ serie di composizione.

Esercizio 3. Se G è un gruppo finito e $N \trianglelefteq G$, dimostrare che G ha una serie di composizione in cui appare N

Esercizio 4. Ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano

Esercizio 5. Se G è un gruppo finito che agisce su un insieme finito X, il numero di orbite dell'azione è

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

ove $X_g = \{x \in X \mid xg = x\}$.

Esercizio 6. Se H un sottogruppo di un gruppo G di indice finito e $N \trianglelefteq G$, dimostrare che H contiene un sottogruppo normale di indice finito

Esercizio 7. Dimostrare che se un gruppo finito ha un sottogruppo normale con $|N| = 3$ non contenuto nel centro di G, allora G ha un sottogruppo di indice due (Suggerimento: far agire G per coniugio su N).

Esercizio 8. Sia

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_7, a = 1, 2, 4 \right\}.$$

Dimostrare che G ha ordine 21 e che il sottogruppo $N = \{A \in G \mid a = 1\}$ è normale in G. Sia $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_7 \right\}$. Trovare l'orbita di $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix})$ di rispetto all'azione (sinistra) naturale diagonale di G su $X \times X$ (ovvero $g(x, x) = (gx, gx)$).

Esercizio 9. Dimostrare che un gruppo di ordine 1986 non è semplice.

Esercizio 10. Dimostrare che un gruppo di ordine$2p$ ha un sottogruppo normale di ordine p.

Esercizio 11. Dimostrare che un gruppo di ordine 200 ha un Sylow normale.

Esercizio 12. Dimostrare che in un gruppo di ordine 42 il 7-Sylow è normale.

Esercizio 13. Se ogni Sylow di un gruppo finito è normale, G è prodotto diretto dei suoi Sylow.

Esercizio 14. Sia G un sottogruppo di S_6 di ordine 20. (a) Mostrare che, in G, nessun elemento di ordine 2 commuta con elementi di ordine 5. (b) Il 5-Sylow di G normale e i 2-Sylow di non lo sono. (c) Mostrare che i 2-Sylow di G sono ciclici. (d) Calcolare il numero di orbite dellazione di G sullinsieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Esercizio 15. Dire se è spezzata la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

ove $f(z) = nz$ e g è la proiezione $z \mapsto z \mod n$.

Esercizio 16. Sia G un gruppo e Definiamo $Hol(G) = G \rtimes Aut(G)$, con prodotto

$$(g, \alpha)(h, \beta) = (g\alpha(h), \alpha \circ \beta)$$

(notazione $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$.) Determinare $Hol(V)$ ove V è il gruppo di Klein.