Algebra 2, Prof. Papi, Terzo foglio di esercizi

Esercizio 1. Siano n, m interi positivi, d, l il loro MCD e mcm, rispettivamente. Sia ξ_k una radice primitiva k-esima di 1. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n)\mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_l)$ e che $\mathbb{Q}(\xi_n) \cap \mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_d)$.

Esercizio 2. Dimostrare che un campo contiene radice primitiva k-esima di 1 se e solo se contiene k distinte radici dell'unità.

Esercizio 3. Calcolare $\mathbb{Q}(\{\sqrt{n} \mid 1 \leq n \leq 28\}) : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 4. Calcolare il gruppo di Galois di $x^5 - 1$ e di $x^6 - 2$ in $\mathbb{F}_7[x]$.

Esercizio 5. Siano $K(a), K(b)$ due estensioni cicliche di grado p, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ i coniugati di a, b. Posto $c = \sum_{i=1}^{p} a_i b_{p-i+1}$, provare che o $c \in K$ oppure che $K(c) : K] = p$.

Esercizio 6. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomi $x^4 - 4x^2 + 16, x^4 + x^3 + 7x^2 + 15x + 5, x^5 - 4x + 2$.

Esercizio 7. Dimostrare che il gruppo di Galois di un polinomio irriducibile del tipo $x^3 + bx + c, b > 0$ si $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_3

Esercizio 8. Dimostrare che ogni gruppo abeliano finito è il gruppo di Galois di una qualche estensione dei razionali.