

## Algebra 2, Prof. Papi, Secondo foglio di esercizi

**Esercizio 1.** Sia  $G$  un gruppo finito nilpotente. Sono equivalenti:

- (a)  $G$  è ciclico;
- (b)  $G/G'$  è ciclico;
- (c) ogni  $p$ -Sylow è ciclico.

**Esercizio 2.** Un gruppo che ha ordine il prodotto di tre primi è risolubile

**Esercizio 3.** Sia  $G$  un gruppo infinito in cui ogni sottogruppo proprio non banale è massimale. Dimostrare che  $G$  è semplice.

**Esercizio 4.** Dimostrare che

- (a) un gruppo di ordine 765 è abeliano;
- (b) un gruppo di ordine 2295 è nilpotente.

**Esercizio 5.** Sia  $G = GL(2, \mathbb{F}_3)$ ,  $G_1 = SL(2, \mathbb{F}_3)$

- (a) Calcolare  $|G|, |G_1|$ . Dimostrare che  $Z(G)$  ha ordine 2 ed è contenuto in  $G_1$ .
- (b) Dimostrare che  $G_1/Z(G) \cong A_4$  e che  $G_1$  ha un 2-Sylow normale

**Esercizio 6.** Classificare i gruppi di ordine 12.