Algebra 2, Prof. Papi, Primo foglio di esercizi

Esercizio 1. $S_4 \cong V \rtimes S_3$

Esercizio 2. Un sottogruppo H di G si dice caratteristico se è invariante per tutti gli automorfismi di G. Dimostrare che l'essere caratteristico è una proprietà transitiva, mentre l'essere normale non lo è. Determinare i sottogruppi caratteristici di D_n. Quali sono i sottogruppi caartteristici di uno spazio vettoriale (pensato come gruppo additivo) ?

Esercizio 3. Determinare $Aut(\mathbb{Q})$ come gruppo additivo e come campo.

Esercizio 4. $Aut(D_n) \cong C_n \rtimes Aut(C_n)$

Esercizio 5. Sia $H = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p =$, p primo dispari, e siano u, v i generatori dei due addendi e sia ϕ l'automorfismo dato da $u \mapsto u + v, v \mapsto v$. Pensiamo ϕ come applicazione $\mathbb{Z}_2$-lineare su H. Dimostrare che il prodotto semidiretto $H \rtimes \langle \phi \rangle$ è un gruppo non abeliano di ordine p^3 in cui ogni elemento non banale ha ordine p.

Esercizio 6. Provare che un p-gruppo ciclico non è mai prodotto semidiretto.

Esercizio 7. Facciamo agire per coniugazione G su G e costruiamo il corrispondente prodotto semidiretto $G \rtimes G$. Dimostrare che tale gruppo è isomorfo a $G \times G$.

Esercizio 8. Siano M, N sottogruppi normali di un gruppo G. Dimostrare che $G/M \cap N$ è isomorfo a un sottogruppo di $G/M \times G/N$

Esercizio 9. Classificare i gruppi di ordine 117