Algebra 1, Prof. Papi, Primo foglio di esercizi

Esercizi proposti a lezione

Esercizio 1. Se R è una relazione di equivalenza su A e $[a]$ è la classe di $a \in A$, verificare che $[a] = [b] \iff aRb$.

Esercizio 2. Verificare che la congruenza modulo n è una relazione di equivalenza e che le operazioni definite in $\mathbb{Z}_n$ sono ben poste e danno a $\mathbb{Z}_n$ la struttura di anello commutativo con unità.

Esercizio 3. Verificare che gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}$ sono ± 1. Verificare che due MCD differiscono per un elemento invertibile.

Esercizio 4. Definire la nozione di minimo comune multiplo di due interi e verificare che, se $[a, b]$ denota il mcm positivo di a, b, allora $[a, b](a, b) = ab$.

Esercizio 5. Verificare che la relazione $(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$, definita su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times}$ è di equivalenza e che le operazioni definite a lezione su quoziente $\mathbb{Q}$ lo rendono un campo.

Ulteriori esercizi

Esercizio 6. Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, diciamo che d è un MCD di $a_1, \ldots, a_n$ se $d | a_i, \forall\, i, 1 \leq i \leq n$ e se $d' | a_i, \forall\, i, 1 \leq i \leq n \implies d' | d$. Dimostrare che un MCD esiste e che esistono interi x_i tali che $d = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$. E' vero che $d = 1 \iff (a_i, a_j) = 1 \forall i \neq j$?

Esercizio 7. Calcolare MCD e identità di Bezout per le seguenti coppie di interi $(123, 234), (1350, 5791)$

Esercizio 8. L'esponenziazione in $\mathbb{N}$ è definita dalle seguenti formule ricorsive: $n^0 = 1, n^{Sm} = n^m \cdot m$. Dimostrare che $n^{(m+k)} = n^m \cdot n^k$ e che $n^{(m \cdot k)} = (n^m)^k$.

Esercizio 9. Sia A un anello. Dimostrare che

1. 0 e l'opposto di ogni elemento di A sono unici.
2. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in A$.
3. $(-a) \cdot b = -(ab)$ per ogni $a, b \in A$.
4. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ per ogni $a, b \in A$.