Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 e W lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2.

1. Si dimostri che esiste un'unica applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $Ker(F) = \mathbb{R}(1+t) \oplus \mathbb{R}(t^2 - t^3)$ e tale che

$$(*) \qquad F(1-t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(t^2+t^3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si determini la matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ presa come base di partenza in V e a $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ presa come base di arrivo in W.

3. Si studi la diagonalizzabilità dell'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $L_A(X) = AX$.

1. $\{1+t, t^2-t^3, 1-t, t^2+t^3\}$ è una base di V (lo si verifica facilmente passando a coordinate rispetto a $\{1, t, t^2, t^3\}$ e verificando che il determinante della matrice dei coefficienti è non zero). Pertanto il teorema di estensione per linearità garantisce l'esistenza e l'unicità di una applicazione lineare verificante $(*)$ e tale che $\ker F \subseteq \mathbb{R}(1-t) \oplus \mathbb{R}(t^2+t^3)$. Poiché $F(1-t)$, $F(t^2-t^3)$ sono linearmente indipendenti, $\ker F = \mathbb{R}(1-t) \oplus \mathbb{R}(t^2+t^3)$

2. $F(1) = F\left(\frac{1}{2}\left((1-t)+(1+t)\right)\right) = \frac{1}{2}F(1-t) + \frac{1}{2}F(1+t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Similmente $F(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $F(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F(t^3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Pertanto $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$t^4 - 4t^2$, che ha radici $0, 0, 2, -2$. Poiché

$m_g(0) = \dim \ker F = 2 = m_a(0)$ concludiamo che L_A è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale V delle matrici reali 2 X 2 si consideri la forma quadratica

$$q(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a^2 + 2ab - b^2 + 2ac - 2bc - c^2 + 2ad - 2bd - 2cd - d^2.$$

Sia g la forma polare di q.

1. Determinare una base di $Ker(g)$.
2. Determinare gli indici di g.
3. Determinare una base per $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\perp}$ (l'ortogonalità si intende rispetto a g).
4. Determinare una base per $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\perp}$ (l'ortogonalità si intende rispetto a g).

1. La matrice della forma polare rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di una base di $Ker\, g$ si ottengono risolvendo il sistema $AX = 0$, che è equivalente a $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Pertanto $Ker\, g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Il polinomio caratteristico di B è $t^2(t^2+2t-6)$. Gli autovalori sono $0, 0, \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$, pertanto $i_0(g) = 2$, $i_+(g) = 1$, $i_-(g) = -1$.

3. $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}^{\perp}$ ha equazioni, rispetto alla base precedentemente fissata

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$$

cioè
$$x_1-3x_2-3x_3-3x_4=0$$

Pertanto $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}^{\perp}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}\in \ker g$, pertanto $\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}^{\perp}=V$

e una base di $\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}^{\perp}$ ~~ker g~~ è una qualsiasi base di V

Esercizio 3.

1. Si discuta la diagonalizzabilità dell'operatore lineare $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $L_A(X) = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1-i & k \\ k & i+1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro complesso k.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2. Spiegare, giustificando ogni risposta, perchè nessuna delle seguenti matrici può rappresentare, in una qualche base, la forma polare di una forma quadratica definita positiva su V.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2/3

1. Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 2t + 2 - k^2$, che ha radici $1 \pm \sqrt{k^2-1}$. Tali radici sono distinte per $k^2 - 1 \neq 0$ cioè $k \neq \pm 1$. Per tali valori di k L_A è diagonalizzabile. Se invece $k = \pm 1$ A ha 1 come autovalore di molteplicità algebrica 2. La corrispondente molteplicità geometrica è 1 sia per $k = 1$ che per $k = -1$. Pertanto L_A non è diagonalizzabile per $k = \pm 1$

2. Una base di V è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, pertanto $\dim V = 3$ e ciò esclude la prima matrice. La seconda non è simmetrica. La terza è degenere e ciò è incompatibile col fatto che la forma sia definita.

Infine l'ultima matrice, sia B, è indefinita, come si può verificare calcolando gli autovalori o semplicemente osservando che se $B = (g)_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $g(v_3, v_3) = b_{33} = -1$.