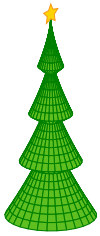

Esercizi di Natale

Esercizio 1 Dimostrare che su ogni campo esistono infiniti polinomi irriducibili.

Esercizio 2 Determinare il grado e una base dell'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4})/\mathbb{Q}$.

Esercizio 3 Sia E/F un'estensione di grado primo q . Se $f(x) \in F[x]$ ha gardo primo p ed è irriducibile su F ma riducibile su E, dimostrare che $q = p$.

Esercizio 4 Determinare il polinomio minimo di $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$ su $\mathbb{Q}$

Esercizio 5 Determinare il campo di spezzamento K di $x^3+x^2+x+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e fattorizzarlo in $K[x]$. Stesso esercizio per $x^6 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 6 Dire se se le seguenti coppie di campi sono isomorfe: $\mathbb{Q}(7), \mathbb{Q}(11)$; $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$.

Esercizio 7 Sia E/F un'estensione e sia $a \in E$ algebrico su F. Dimostrare che $\sqrt[3]{\sqrt{a}+1}$ è algebrico su F.

Esercizio 8 Calcolare $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$.

Esercizio 9 Trovare un elemento primitivo per $\mathbb{Q}(\sqrt{2}-i, \sqrt{3}+i)/\mathbb{Q}$.

Esercizio 10 Espicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione $K/\mathbb{Q}$, ove K è il campo di spezzamento del polinomio $(x^4-1)(x^2-5)$. Stesso esercizio per $f(x) = x^4 + x^2 - 1$.

Esercizio 11 Dimostrare che se $a \in K(X) \setminus K$, $a = p(x)/q(x), p(x), q(x) \in K[x], MCD(p, q) = 1$, allora $[K(X) : K(a)] \leq \max(\deg p, \deg q)$. Usando questo fatto, dimostrare che $Aut_K K(X) \cong PGL_2(K)$.