

Algebra 1
Prof. P. Papi
Esercizi per casa

Esercizio 1. Classificare i gruppi abeliani di ordine 360.

Esercizio 2. Dimostrare che un gruppo di ordine 200 ha un Sylow normale.

Esercizio 3. Dimostrare che se G è un gruppo allora $|G/Z(G)| \neq 77$.

Esercizio 4. Dimostrare che un anello in cui $x^3 = x$ per ogni x è commutativo.

Esercizio 5. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p}, \dots)$ è un'estensione algebrica infinita dei razionali.

Esercizio 6. Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ sui razionali.

Esercizio 7. Dimostrare che il campo di spezzamento di $x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ è un campo finito con 8 elementi

Esercizio 8. Dimostrare che in ogni estensione dei razionali il polinomio $x^3 + x + 1$ o è irriducibile o si spezza completamente

Esercizio 9. Sia $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare le radici a, b di f per cui $\mathbb{Q}(a) \cong \mathbb{Q}(b)$. Determinare poi il campo di spezzamento di f

Esercizio 10. Determinare la minima estensione normale di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3})$ in $\overline{\mathbb{Q}}$.