Algebra 2

Prof. P. Papi

Prova scritta di Algebra 2 del 21-6-2019

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8.5	
2	8.5	
3	8.5	
4	8.5	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. È ammesso risolvere un quesito assumendo vero il risultato di un quesito precedente.*

Voto/30:

Esercizio 1. Sia σ un automorfismo del campo dei numeri reali.

1. Dimostrare che $\sigma(x) = x \, \forall x \in \mathbb{Q}$.
2. Dimostrare che se $x > 0$ allora $\sigma(x) > 0$.
3. Dimostrare che σ è necessariamente l'identità.

Risoluzione:

Esercizio 2. Dimostrare che a meno di isomorfismo esiste un unico gruppo non abeliano G un gruppo di 3025 avente i Sylow ciclici.

Risoluzione:

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f(x) = x^8 + 3x^6 + x^5 + 3x^3 + x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Si determinino il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$, il gruppo di Galois $Gal(K/\mathbb{Q})$ e il numero di campi intermedi $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$

Risoluzione:

Esercizio 4. Dimostrare che le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(a) ogni gruppo di ordine dispari è risolubile;

(b) ogni gruppo semplice non abeliano ha ordine pari.

Risoluzione:

Soluzioni

Esercizio 1. Poiché $\sigma(1) = 1$, si ha $\sigma(n) = \sigma(1+\ldots+1) = \sigma(1)+\ldots+\sigma(1) = n$ per ogni intero n. Ma allora $1 = \sigma(1) = \sigma(n/n) = \sigma(n)\sigma(1/n) = n\sigma(1/n)$, per cui $\sigma(1/n) = 1/n$ e $\sigma(m/n) = \sigma(m)\sigma(1/n) = m/n$. Se poi $x > 0$, $\sigma(x) = \sigma((\sqrt{x})^2) = \sigma(\sqrt{x})^2 > 0$. Infine, supponiamo per assurdo $\sigma(x) > x$. Esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\sigma(x) > q > x$. Allora $q - x > 0$, pertanto $\sigma(q - x) > 0$, ovvero $q = \sigma(q) > \sigma(x)$, contraddizione. Analogamente si procede se $\sigma(x) < x$

Esercizio 2. Risulta $|G| = 5^2 11^2$. I teoremi di Sylow danno subito che esiste un unico 11-Sylow H, che è quindi normale. Se K è un 5-Sylow, risulta $H \cap K = \{1\}$ e dunque $G = H \rtimes_\phi K$ per qualche omomorfismo $\phi : H \to Aut(K) \cong U(121) \cong \mathbb{Z}_{\varphi(121)} = \mathbb{Z}_{110}$. L'omomorfismo ϕ è determinato dall'azione di un generatore h di H, che ha ordine 25, in elemento di ordine che divide 25 (quindi di ordine 1,5, 25) di $Aut(K)$. L'ordine di $\phi(h)$ non può essere 1, altrimenti il prodotto sarebbe diretto e il gruppo abeliano, e non può essere 25 perché $25 \nmid 110$. dunque $\phi(h)$ ha ordine 5, e quindi abbiamo 4 possibilità, ovvero gli elementi non nulli dell'unico sottogruppo di ordine 5 (che sono in effetti $\phi(h), \phi(h)^2, \phi(h)^3, \phi(h)^4$). D'altronde, tutte queste possibilità (siano $\phi = \phi_1, .., \phi_4$) danno luogo allo stesso gruppo, perché $\phi_i = \phi \circ \zeta_i$, ove $\zeta_i(h) = h^i$ è un automorfismo di H.

Esercizio 3. Risulta $f(x) = (x^2 + 3)(x^6 + x^3 + 1)$. Si osserva che $x^6 + x^3 + 1 = \Phi_9(x)$, dunque $K = (i\sqrt{3}, \xi)$, ove ξ è una radice primitiva nona dell'unità. Se $\xi = e^{2\pi i/9}$, si ha $\xi^3 = e^{2\pi i/3} = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$. Dunque $\sqrt{3}/2i \in \mathbb{Q}(\xi)$, e il campo di spezzamento è l'estensione ciclotomica $\mathbb{Q}(\xi)$, che ha grado 6 sui razionali e per gruppo di Galois $U(9)$, che è ciclico di ordine 6. Ci sono pertanto quattro campi intermedi, corrispondenti ai quattro sottogruppi del gruppo ciclico di ordine 6.

Esercizio 4. Ricordiamo preliminarmente che un gruppo abeliano è risolubile e che un gruppo semplice e risolubile è ciclico di ordine primo, in particolare abeliano. Se assumiamo che un gruppo di di ordine dispari è risolubile e G è un gruppo semplice non abeliano, esso non può avere ordine dispari, perché per ipotesi sarebbe risolubile e quindi abeliano. Viceversa supponiamo che un gruppo semplice non abeliano abbia ordine pari. Dato G, se è abeliano è risolubile, quindi possiamo assume $|G|$ non abeliano. Procediamo per induzione su $|G|$, con base ovvia $G = \{1\}$. Se G fosse semplice, per ipotesi avrebbe ordine pari, escluso. Allora esiste un sottogruppo normale non banale N di G, che per il teporema di Lagrage ha ordine dispari. Allora per induzione $N, G/N$ sono risolubili, e ciò implica che G lo è.