Algebra 2
Prof. P. Papi
Prova scritta del 4/2/2020

Esercizio 1. Classificare i gruppi di ordine 231.

Sia $|G| = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ dai teoremi di Sylow segue che $n_7 = n_{11} = 1$ Detti N, N' gli unici 7-Sylow e 11-Sylow, questi sono normali e dunque NN' è un sottogruppo normale che è ciclico (è di ordine pq, p, q, primi. $p < q$, p non divide $q - 1$). Si può già dedurre che se H è un 3-Sylow, allora $G \cong NN' \rtimes H$. Bisogna studiare allora gli omomorfismi $f : G \to Aut(NN') \cong Aut(C_7 \times C_{11}) \cong Aut(C_7) \times Aut(C_{11}) \cong C_6 \times C_{10}$. Dal teorema di omomorfismo, l'immagine di f può avere solo ordine 1 o 3. Nel primo caso si ottiene il prodotto diretto; nel secondo caso si osserva che G è generato da elementi x, y che generano rispettivamente NN', H. Allora i possibili f sono del tipo $f(x) = 0, f(y) = a$ ove a è uno dei due elemento di ordine 3 in $Aut(NN') \cong C_6 \times C_{10}$. Si vede subito che scelte diverse di x, y, a danno luogo a gruppi isomorfi.

Esercizio 2. Costruire la tavola dei caratteri del gruppo Q delle unità dei quaternioni (ovvero la matrice $\chi_i(C_j)$, ove χ_i sono è l'i-esimo carattere irriducibile e C_j la j-esima classe di coniugio). Suggerimento: si ricordi che gli elementi di Q possono scriversi come matrici 2×2 a coefficienti complessi.

Le classi di coniugio di Q sono

$$C_1 = \{1\}, \quad C_2 = \{-1\}, \quad C_3 = \{i, -i\}, \quad C_4 = \{j, -j\}, \quad C_5 = \{k, -k\}$$

Per motivi generali ci sono quattro rappresentazioni irriducibili di dimensione 1 e una di dimensione due. Le unidimensionali sono la banale χ_1 e le tre χ_2, χ_3, χ_4 che hanno per nucleo i tre sottogruppi di ordine 4 generati da i, j, k. La bidimensionale (sia χ_5 il suo carattere) è data da

$$i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

È facile vedere che quest'ultima rappresentazione è irriducibile. Quindi la tavola dei caratteri è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Determinare i possibili gruppi di Galois sui razionali del polinomio

$$f(x) = x^4 - bx^2 + c,$$

assumendo tale polinomio irriducibile. Non è richiesto di specificare il gruppo in funzione di b, c.

Si osserva che se α è una radice di f anche $-\alpha$ lo è. Dunque nel campo si spezzamento

$$x^4 - bx^2 + c = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$$

e il gruppo di Galois agisce transitivamente sull'insieme delle radici $R = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, dato che f è irriducibile. D'altra parte ogni elemento di G verifica $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha), \sigma(-\beta) = -\sigma(\beta)$, dunque G, visto come permutazioni di R, è un sottogruppo transitivo di

$$H = \{Id, (\alpha, -\alpha)(\beta, -\beta), (\alpha, \beta)(-\alpha, -\beta), (\alpha, -\beta)(-\alpha, \beta), (\alpha, \beta, -\alpha, -\beta), (\alpha, -\beta, -\alpha, \beta), (\alpha, -\alpha), (\beta, -\beta)\}$$

H ha esattamente tre sottogruppi transitivi, H (diedrale),

$$\{Id, (\alpha, -\alpha)(\beta, -\beta), (\alpha, \beta)(-\alpha, -\beta), (\alpha, -\beta)(-\alpha, \beta)\}$$

(Klein) e

$$\{Id, (\alpha, -\alpha)(\beta, -\beta), (\alpha, \beta, -\alpha, -\beta), (\alpha, -\beta, -\alpha, \beta)\}$$

(ciclico).

Esercizio 4. Sia F un campo e $A \subseteq F$ un sottoanello di F. dimostrare che sono equivalenti

1. $z \in F$ è radice di un polinomio monico in $A[x]$.
2. $A[z]$ è un A-modulo finitamente generato.
3. Esiste un A-modulo non zero $M \subset F$ finitamente generato su A tale che $zM \subseteq M$.

1) $\implies$ 2): se $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_i \in A$, si ha $z^n = -a_{n-1}z^{n-1} - \ldots - a_0$ e ogni polinomio in z è combinazione lineare a coefficienti in A di $1, z, \ldots z^{n-1}$.

2) $\implies$ 3): Basta prendere $M = A[z]$.

3) $\implies$ 1): se $\{b_1, \ldots b_n\}$ è una base di M su A, risulta $zb_i = \sum_j \alpha_{ij} b_j, \alpha_{ij} \in A$. Se $A = (\alpha_{ij})$ e $v = (b_1, \ldots, b_n)^t$, si ha $zv = Av$, per cui z è radice del polinomio monico $det(xI - A)$ a coefficienti in A.