Algebra 2
Prof. P. Papi
Prova scritta del 20-1-2020

Esercizio 1. Si consideri il gruppo di matrici

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \mid a, b, c, \in \mathbb{Z}_2.$$

1. Calcolare $|G|$.

2. Determinare le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G.

3. Determinare le rappresentazioni irriducibili di G.

1. Gli elementi a, b, c possono essere scelti indipendentemente in $\mathbb{Z}_2$, dunque $|G| = 2^3 = 8$. Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $f(r) = A, f(s) = B$, risulta $A^4 = B^2 = BABA = Id$, quindi f si estende a un isomorfismo $D_4 = \langle r, s, |r^4, s^2, srs = r^3\rangle \to G$ (f è suriettiva perchè ha immagine di cardinalità almeno 5, quindi necessariamente 8, ed è iniettiva perchè $|G| = |D_4| = 8$).

2. Poichè G non è abeliano, esiste una rappresentazione irriducibile non unidimensionale, ed essendo la somma dei quadrati delle dimensioni degli irriducibili pari a 8, l'unica possibilità è che ci siano quattro rappresentazioni unidimensionali e una (irriducibile) bidimensionale.

3. Le quattro rappresentazioni unidimensionali $G \to \mathbb{C}^*$ sono determinate da

$$\psi_1(A) = 1, \psi_1(B) = 1, \quad \psi_2(A) = -1, \psi_2(B) = 1, \quad \psi_3(A) = 1, \psi_3(B) = -1, \quad \psi_4(A) = -1, \psi_4(B) = -1.$$

quella bidimensionale, $G \to GL(2, \mathbb{C})$, dall'ovvio significato geometrico, da

$$\phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

1. Sia E/F un'estensione finita di Galois. Dimostrare che la traccia $T_{E/F}(x), x \in E$ non può essere identicamente nulla.

2. Si consideri l'estensione quadratica $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$. Calcolare esplicitamente la norma e la traccia di $x = a + b\sqrt{m}$.

1) Ricordiamo che se E/F è un'estensione finita di Galois e $Gal(E/F) = \{g_1, \dots, g_k\}$, allora $T_{E/F}(x) = \sum_{i=1}^k g_i(x)$. Se fosse identicamente $\sum_{i=1}^k g_i(x) = 0$ sarebbe contraddetto il lemma di Dedekind sull'indipendenza dei caratteri.

2) L'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ è di Galois con gruppo di Galois ciclico di ordine 2, sia $\{1, \sigma\}$. Allora

$$T_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(x) = x + \sigma(x) = a + b\sqrt{m} + a - b\sqrt{m} = 2a,$$
$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(x) = x \cdot \sigma(x) = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2.$$

Esercizio 3. Determinare il gruppo di Galois sui razionali del polinomio

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x - 3.$$

Il polinomio f si fattorizza su $\mathbb{Q}$ come $f(x) = (x-3)(x^3 + x^3 + 3x + 1)$. Infatti $x^3 + x^2 + 3x + 1$ è irriducibile perchè non ha radici razionali (ed è di terzo grado). La sostituzione $x \mapsto y - 1/3$ trasforma il polinomio in $y^3 + 8/3y + 2/27$, che ha lo stesso discriminante

$$-4(8/3)^3 - 27(2/27)^2 < 0$$

pertanto il gruppo di Galois è isomorfo a S_3.

Esercizio 4. Sia G un gruppo finito.

1. Dimostrare che se $Aut(G)$ è ciclico allora G è abeliano.

2. Dimostrare che non esiste un gruppo abeliano finito il cui gruppo di automorfismi sia ciclico non banale di ordine dispari.

1) Ricordiamo che $G/Z(G))$ è isomorfo a un sottogruppo H di $Aut(G)$; se quest'ultimo gruppo è ciclico, tale è H. Ma se $G/Z(G)$ è ciclico, generato da a, G è abeliano: dati $x, y \in G$, $x = a^h z_1, y = a^k z_2$ con $z_1, z_2 \in Z(G)$ si ha

$$xy = a^h z_1 a^k z_2 = a^{h+k} z_1 z_2 = a^{h+k} z_2 z_1 = a^k z_2 a^h z_1 = yx.$$

2) Sia G un gruppo con $Aut(G)$ è ciclico di ordine dispari maggiore di 1. Per la parte 1) G è abeliano, e $x \mapsto x^{-1}$ è un automorfismo di ordine al massimo due. Poichè $Aut(G)$ ha ordine dispari , $x \mapsto x^{-1}$ deve essere l'identità e quindi tutti gli elementi hanno ordine al più due. Pertanto $G \cong \mathbb{Z}_2^r$ e $Aut(G) = GL(r, \mathbb{Z}_2)$ certamente contiene una copia di $GL(2, \mathbb{Z}_2) \cong S_3$, contro il fatto che $Aut(G)$ è abeliano.