Algebra 2

Prof. P. Papi

Prova scritta di Algebra 2 del 29-1-2019

Esercizio 1. Dimostrare che un gruppo di ordine 132 non è semplice.

Risoluzione: Denotiamo al solito con n_p il numero dei p-Sylow. Si ha $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$. Allora dai teoremi di Sylow $n_{11} \in \{1, 12\}, n_3 \in \{1, 4, 22\}, n_2 \in \{1, 3, 11, 33\}$. Se G non è semplice, $n_{11} = 12$, quindi G ha $10 \cdot 12 = 120$ elementi di ordine 11 (due sottogruppi di ordine 11 si intersecano necessariamente nell'identità). Se $n_3 = 22$ allora G ha $2 \cdot 22 = 44$ elementi di ordine 3. Poiché $120 + 44 > 132$ questo non è possibile, dunque $n_3 = 4$ e ci sono 8 elementi di ordine 3. Sono rimasti 4 elementi di ordine diverso da $11, 3$ che devono formare necessariamente un 2-Sylow, che è pertanto unico e quindi normale.

Esercizio 2. Sia G un gruppo finito. Dimostrare che G è nilpotente se e solo se $xy = yx$ per ogni coppia di elementi x, y aventi ordini coprimi.

Risoluzione: Ricordiamo che G finito è nilpotente se e solo se è prodotto diretto dei suoi Sylow: $G = P_1 \times \ldots \times P_k$. Se $x = (x_1, \ldots, x_k), x = (y_1, \ldots, y_k)$ hanno ordini coprimi, allora per ogni i o $x_i = 1$ o $y_i = 1$. Pertanto $[x, y] = ([x_1, y_1], \ldots, [x_k, y_k]) = (1, \ldots, 1)$. Viceversa se $xy = yx$ per ogni coppia di elementi x, y aventi ordini coprimi e P_i, $i = 1, \ldots, k$, sono p_i-Sylow di G, uno per ogni primo p_i che divide $|G|$, allora $P_1 \cdots P_k$ è un sottogruppo (perchè $x_i x_j = x_j x_i$ se $x_i \in P_i, x_j \in P_j, i \neq j$). Tale sottogruppo ha ordine $|G|$, quindi coincide con G. Ora, dall'ipotesi, se $x \in P_i$ e $y = x_1 \cdots x_k$, $x_j \in P_j$, si ha

$$yxy^{-1} = (x_1 \cdots x_k)x(x_1 \cdots x_k)^{-1} = x_1 \cdots x_i x x_i^{-1} \cdots x_1^{-1} = x_i x x_i^{-1} \in P_i$$

dunque P_i è normale in G. Essendo ogni Sylow normale, G è nilpotente.

Esercizio 3. Dimostrare che il polinomio $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7$ è risolubile per radicali su $\mathbb{Q}$, esibendo il campo di spezzamento estensione radicale di $\mathbb{Q}$. Calcolarne il gruppo di Galois.

Risoluzione: Dobbiamo dimostrare che $f(x)$ si spezza in un'estensione radicale di $\mathbb{Q}$. Le sue radici sono $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{2}}$. Dunque il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}}, \sqrt{3-\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{2}}, \sqrt{3-\sqrt{2}})$, che può ottenersi attraverso la catena di estensioni semplici

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3+\sqrt{2}}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{2}})(\sqrt{3-\sqrt{2}})$$

Ogni estensione nella catena è del tipo $L(a)/L$ con $a \notin L, a^2 \in L$. Dunque K è un'estensione radicale di $\mathbb{Q}$. Essendo il polinomio $f(x)$ irriducibile su $\mathbb{Q}$ e $[K : \mathbb{Q}] = 8$ il gruppo di Galois è necessariamente isomorfo a D_4.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $p(x) = x^6 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare:

1. il campo di spezzamento K di $p(x)$ su $\mathbb{Q}$;
2. un elemento primitivo per $K/\mathbb{Q}$;
3. il gruppo di Galois di $K/\mathbb{Q}$;
4. una base normale per K su $\mathbb{Q}$.

Risoluzione: K deve contenere $\sqrt[6]{2}$ e le radici seste dell'unità: infatti, in un tale campo $p(x) = \prod_{i=0}^{5}(x - \xi^i \sqrt[6]{2})$ ove ξ è una radice primitiva sesta dell'unità, ad esempio $\xi = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Poiché $x^6 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, è necessario e sufficiente che K contenga $i\sqrt{3}$ (o ξ), dunque $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \xi)$, e $[K : \mathbb{Q}] = 12$ con base

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_{12}\} = \{1, \sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{16}, \sqrt[6]{32}, \xi, \xi\sqrt[6]{2}, \xi\sqrt[6]{4}, \xi\sqrt[6]{8}, \xi\sqrt[6]{16}, \xi\sqrt[6]{32}, \}.$$

Ogni $\mathbb{Q}$-automorfismo di K è determinato dalle immagini di $\sqrt[6]{2}, \xi$. Siano ϕ, ψ gli automorfismi indotti da

$$\phi(\sqrt[6]{2}) = \xi\sqrt[6]{2},\ \phi(\xi) = \xi, \quad \psi(\sqrt[6]{2}) = \sqrt[6]{2}, \psi(\xi) = \bar{\xi}$$

Risulta $\phi^6 = Id, \psi^2 = Id, \psi\phi\psi\phi = Id$, pertanto $Gal(K/\mathbb{Q})$ è un quoziente del gruppo diedrale D_6, ed avendo ordine 12 coincide con esso. Poiché

$$Gal(K/\mathbb{Q})(\sqrt[6]{2} + \xi) = \{\xi^j\sqrt[6]{2} + \xi, \bar{\xi}^j\sqrt[6]{2} + \bar{\xi}, j = 0, \ldots, 5\},$$

possiamo concludere che $\sqrt[6]{2} + \xi$ è primitivo (l'unico elemento che lo fissa è l'identità).

Per trovare la base normale bisogna considerare la funzione $f(x_1, \ldots, x_{12}) = \det(X_i X_j)$ ove

$$X_i = \sum_{j=1}^{12} \sigma_i(\beta_j).$$

e $\sigma_i = \phi^i$, $i = 1, \ldots, 6, \sigma_j = \psi\phi^{j-7}$, $j = 7 \ldots, 12$. Scelti $a_1, \ldots a_{12}$ tali che $f(a_1, \ldots, a_{12}) \neq 0$, abbiamo dimostrato che $\left\{\sigma_i\left(\sum_{j=1}^{12} a_j\beta_j\right) \mid 1 \leq j \leq 12\right\}$ è una base normale.