Esercizio 1

1. Costruire, giustificando tutti i passaggi, il gruppo $G = \mathbb{U}_{15}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$ e determinarne i sottogruppi.
2. Costruire, se esiste, un omomorfismo ω di dominio e codominio il gruppo G stesso, tale che l'immagine sia un sottogruppo non ciclico di G.

Essendo $U_m = \{ \bar{a} \mid 1 \leq a \leq m, (a,m) = 1 \}$, risulta $U_{15} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}\}$.

Tale gruppo ha, oltre ai sottogruppi banali, tre sottogruppi di ordine due:

$$S_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}, \quad S_2 = \{\bar{1}, \bar{11}\}, \quad S_3 = \{\bar{1}, \bar{14}\}$$

e tre sottogruppi di ordine quattro

$$T_1 = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\} = \langle \bar{8} \rangle$$

$$T_2 = \langle \bar{7} \rangle = \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{4}, \bar{13}\} = \langle \bar{13} \rangle$$

$$T_3 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\}$$

T_1, T_2 sono chiaramente ciclici, mentre T_3 è di tipo Klein. L'unico quoziente di G rispetto a un sottogruppo di ordine 2 che non sia ciclico è $G/S_1 = \{S_1, \bar{2}S_1, \bar{7}S_1, \bar{11}S_1\}$ che è isomorfo a T_3 tramite $\omega^*: G/S_1 \to T_3$, $S_1 \mapsto \bar{1}$, $\bar{2}S_1 \mapsto \bar{4}$, $\bar{7}S_1 \mapsto \bar{11}$, $\bar{11}S_1 \mapsto \bar{14}$.

Tale isomorfismo induce l'omomorfismo richiesto $\omega(\bar{a}) = \omega^*(\bar{a}$

Esercizio 2

1. Sia G un gruppo e $a, b \in G$. Dire se l'equazione
$$axb = bab^2$$
ammette sempre soluzione e se tale soluzione è unica.

2. Risolvere l'equazione precedente nel caso in cui G sia il gruppo simmetrico S_5 e $a = (1,5,4)(2,4,3)(1,2)$, $b = (1,2)(1,2,3)(1,2,3,4)$.

3. Si esibiscano due sottogruppi di S_5 di ordine 4 non isomorfi. Esistono tre sottogruppi di S_5 di ordine 4 a due a due non isomorfi ? Determinare il numero dei sottogruppi di ordine 4 di S_5.

1. Moltiplicando ambo i membri a sinistra per a^{-1} e a destra per b^{-1} si ottiene $x = a^{-1}bab$ dunque la soluzione esiste ed è unica per ogni $a, b \in G$

2. $x = (1,3,5)$

3. Poniamo $S = \langle (1,2,3,4) \rangle = \{(1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), id\}$ e $T = \{(1,2), (3,4), (12)(3,4), id\}$.
S, T ~~sono~~ non sono isomorfi perché S è ciclico e T è di tipo Klein (dunque, in particolare, S ha un elemento di ordine 4 mentre ciò non accade per T). Poiché ogni gruppo di ordine quattro è isomorfo a un gruppo ciclico o al gruppo di Klein, non è possibile trovare un ulteriore sottogruppo di ordine quattro avente ~~[illegible]~~ non isomorfo a S, e T.

Enumeriamo i sottogruppi ciclici di ordine 4. Scelti quattro elementi in $\{1, \dots, 5\}$ (ad esempio $1, 2, 3, 4$) possiamo formare tre distinti sottogruppi di ordine 4

$$\langle (1,2,3,4) \rangle = \{ (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), Id \}$$

$$\langle (1,3,2,4) \rangle = \{ (1,3,2,4), (1,2)(3,4), (1,4,2,3), Id \}$$

$$\langle (1,2,4,3) \rangle = \{ (1,2,4,3), (1,4)(2,3), (1,3,4,2), Id \}$$

Pertanto il numero totale dei sottogruppi ciclici si ottiene moltiplicando per 3 il numero di possibili scelte di quattro elementi in $\{1, \dots, 5\}$: $3 \cdot \binom{5}{4} = 3 \cdot 5 = 15$.

Per contare i gruppi di tipo Klein consideriamo prima il caso di S_4; si hanno allora le seguenti quattro possibilità,

$\{ Id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4) \}$ $\{ Id, (1,3), (2,4), (1,3)(2,4) \}$,

$\{ Id, (1,4), (2,3), (1,4)(2,3) \}$ $\{ Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$.

Basta a questo punto osservare che in S_5 ci sono cinque sottogruppi isomorfi a S_4, tanti tante permutazioni che fissano uno ~~stesso~~ numero. Si ottengono in totale 20 sottogruppi di tipo Klein

ESERCIZIO 4 Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_3,\ x_1 - x_2 + 5x_3)$

(a) Si scriva la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (di partenza e di arrivo)

(b) Si scriva la matrice $P_{\mathcal{B}}$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, di partenza e d'arrivo

(c) Si determinino delle basi per il nucleo e per l'immagine di f

SOLUZIONI

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

(b) $$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Base $\operatorname{Im} f$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ Base $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

ESERCIZIO 2: Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ così definita: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_3,\ x_1 - x_2 + 5x_3)$

(a) Si scriva la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (di partenza e di arrivo)

(b) Si scriva la matrice P_B che rappresenta f rispetto alla base $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, di partenza e d'arrivo

(c) Si determinino delle basi per il nucleo e per l'immagine di f

SOLUZIONI

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

(b) $$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Base Im f: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ Base Ker f = $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Esercizio ~~3~~ 4. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_4).$$

1. Si scriva la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ (presa come base di partenza e di arrivo).

2. Si dica se f è diagonalizzabile e in tal caso si scriva una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per f.

1) $f(1,0,0,0) = (1,0,0,1) = f(0,0,0,1)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,1,0) = f(0,0,1,0)$

Dunque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Il polinomio caratteristico di A è $(t-2)^2 t^2$ per cui gli autovalori sono $0, 2$, con molteplicità algebrica e geometrica 2.

Dunque f è diagonalizzabile e

$V_0 = \mathbb{R}(1,0,0,-1) \oplus \mathbb{R}(0,1,-1,0)$

$V_2 = \mathbb{R}(1,0,0,1) \oplus \mathbb{R}(0,1,1,0)$