Algebra 2

Prof. P. Papi

Seconda prova parziale

Esercizio 1.

1. Sia L un'estensione quadratica di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ove m è un intero privo di quadrati.

2. Sia $K/\mathbb{Q}$ un'estensione galoisiana di grado 4. Supponiamo che $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ove a, b sono numeri interi distinti, diversi da 1 e privi di quadrati.

Risoluzione: Risulta $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ ove il polinomio minimo di α è un polinomio di secondo grado irriducibile su $\mathbb{Q}$. Se Δ è il discriminante, risulta $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. Inoltre, se $\Delta = p/q$, si ha $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{pq}}{q}$; possiamo scrivere $pq = b^2 m$ con m intero privo di quadrati e diverso da 1. Pertanto $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Dalla corrispondenza di Galois sappiamo che $Gal(K/\mathbb{Q})$ ha tre sottogruppi ciclici di ordine due. A questi sottogruppi corrispondono tre estensioni quadratiche L_1, L_2, L_3 di $\mathbb{Q}$; per la prima parte, possiamo assumere $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}), L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{m_2})$, cosicchè $L_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1 m_2})$, e $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$

Esercizio 2. Sia K il campo di spezzamento di $x^8 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Determinare $Gal(K/\mathbb{Q})$.

2. Determinare i campi intermedi $K \supseteq B \supseteq \mathbb{Q}$.

Risoluzione: osserviamo che a è una radice primitiva ottava di -1 se e solo se è una radice primitiva sedicesima di 1. Pertanto $x^8+1 = \Phi_{16}(x)$. Ne segue che $K = \mathbb{Q}(\xi)$ ove ξ è una radice primitiva sedicesima di 1. Essendo K un'estensione ciclotomica, è Galoisiana con gruppo di Galois $U(\mathbb{Z}_{16}) \cong C_4 \times C_2$. Dobbiamo infine determinare, per il teorema di corrispndenza di Galois, i sottogruppi di $C_2 \times C_4$. Realizziamo tale gruppo come $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Per il teorema di Lagrange, i possibili sottogruppi propri possono avere ordini 2, e quindi possono essere ciclici o di Klein. I sottogruppi ciclici di ordine due sono generati da $(0,2), (1,0), (1,2)$, quelli di ordine quattro da $(0,1)$ (oppure $(0,3)$) e da $(1,1)$ (oppure $(1,3)$). Il Klein è formato dall'identità e da tuti gli elementi di ordine 2. Ci sono inoltre i due sottogruppi impropri $\{(0,0)\}, Z_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 3. Determinare il campo di spezzamento K di $x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ e il gruppo di Galois di $K/\mathbb{Z}_5$.

Risoluzione: Risulta $x^5+x+1 = (3+x)(1+x+x^2)(2+x+x^2)$, e i due fattori quadratici sono irriducibili, poichè non hanno radici. Se a è una radice di $1+x+x^2$, il campo di spezzamento di $1+x+x^2$ è $\mathbb{Z}_5(a)$, che è il campo $\mathbb{F}_{25}$ con 25 elementi. L'unicità di tale campo mostra che in esso anche $2+x+x^2$ si spezza, dunque $\mathbb{F}_{25}$ è il campo di spezzamento di $x^5 + x + 1$. Risulta pertanto $Gal(K/\mathbb{Z}_5) \cong C_2$.