Esercizio 1. Si considerino i punti $A = (1,-1,0)$, $B = (2,0,-1)$, $C = (0,2,-1)$, $D = (1,1,1)$.

a) Dimostrare che A, B, C, D non sono complanari.

b) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti A, B e equazioni cartesiane della retta s passante per i punti C, D.

c) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

a) Basta vedere che D non appartiene al piano π passante per A, B, C, π ha equazioni cartesiane $x+y+2z = 0$, e $1+1+2 \neq 0$

b) $r: \vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$, in coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ da cui $s: \begin{cases} y = 2 - x \\ z = -1 + 2x \end{cases}$

c) Dato che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, le rette sono sghembe

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_3 - x_4).$$

Determinare basi per nucleo e immagine di T. Dire se T è invertibile.

La matrice di T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker T = \{ X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} T = \cancel{S}_C(A) = S_R(A^t) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

T non è invertibile, perché $\ker T \neq 0$, quindi T non è iniettiva

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×3. Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b-c & c & -b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio di V e trovarne una base. Detto U lo spazio generato da $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determinare una base di $U \cap W$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \right\}$$

Essendo il sistema che definisce W lineare ed omogeneo, W è un sottospazio.

$$W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tre matrici a secondo membro sono dunque un insieme di generatori. Essendo linearmente indipendenti (verifica in coordinate o usando la definizione), esse formano una base di W. Si ha:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$ Pertanto

$$U \cap W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Determinare la compatibilità e il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2ky - z = k \\ x + 2y + z = 3 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & -2k & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6k$. Dunque se $k \neq 0$ la matrice dei coefficienti ha rango massimo 3, e tale è il rango della matrice completa. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione unica. Se $k = 0$ il rango della matrice dei coefficienti è 2, mentre quello della matrice completa è 3, dunque il sistema è incompatibile.

Esercizio 5. Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2(x_1x_2 - x_3x_4).$$

Calcolare gli indici di q. Se A è la matrice di q rispetto alla base standard, deteminare una matrice ortogonale P tale che P^tAP è diagonale.

Risulta
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono $1, -1$ entrambi con molteplicità due. Risulta

$$V_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Infine, $i_+(q) = i_-(q) = 2$, $i_0(q) = 0$.