Algebra 1

Proff. A. De Sole e P. Papi

Prima prova parziale

14 novembre 2019

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista.*

Voto/30: ______

Esercizio 1. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 10 \\ x \equiv 8 \mod 15 \\ x \equiv 5 \mod 84 \end{cases}$$

Risoluzione:

Risposta: $x = \boxed{}$

Esercizio 2. Determinare la classe di congruenza del numero $k = 2^{70} + 3^{70}$ modulo 13.

Risoluzione:

Risposta: $k \equiv \boxed{\qquad\qquad \bmod (13)}$

Esercizio 3. Siano G_1, G_2 gruppi di ordine m e n rispettivamente, con $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. Si consideri il gruppo prodotto $G_1 \times G_2$. Dimostrare che ogni sottogruppo di $G_1 \times G_2$ è del tipo $H_1 \times H_2$, con H_1, H_2 sottogruppi di G_1, G_2, rispettivamente.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia G un gruppo di ordine n con un'azione non banale su un insieme S di cardinalità r tale che $r! < n$. Dimostrare che G non può essere semplice.

Risoluzione:

Esercizio 5. Sia p un primo e G un sottogruppo p-Sylow di $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (dove $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p$ è il campo degli interi modulo p). Dimostrare che esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{Z}_p^n$ tale che $Av = v$ per ogni $A \in G$.

Risoluzione:

.

(Pagina lasciata intenzionalmente vuota.)

.

(Pagina lasciata intenzionalmente vuota.)