Prima Parte

<u>Quesito 1</u> La serie converge per $x \in \left[12-\frac{1}{e}, 12+\frac{1}{e}\right]$.

Per il criterio del rapporto la serie

converge se $|x-12| < \frac{1}{e}$

diverge se $|x-12| > \frac{1}{e}$

Se $|x-12| = \frac{1}{e}$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2en^2}$ che converge.

<u>Quesito 2</u> Il limite è $+\infty$ perchè

$$\lim_{n\to+\infty} \log n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = 0$$

e $\log n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) > 0$ per $n \gg 0$.

Infatti la formula di Taylor per $\cos x$ da che

$$1-\cos\frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e quindi

$$\log n \cdot \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{\log n}{2n^2} + \log n \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^a} \to 0$ per $a>0$, segue quanto affermato.

Quesito 3 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \log\frac{17}{5}$

Infatti $\displaystyle\frac{2x+4}{x^2+4x+5} = \frac{d}{dx}\left(\log(x^2+4x+5)\right)$ e per il Teorema fondamentale del Calcolo

$$\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \left[\log(x^2+4x+5)\right]_0^2 = \log 17 - \log 5 = \log\frac{17}{5}.$$

Quesito 4 $\displaystyle\frac{d}{dx}\left((2x)^{3x}\right) = 3\cdot(1+\log 2+\log x)\cdot(2x)^{3x}.$

Infatti $(2x)^{3x} = e^{3x\cdot\log 2x}$ e

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x\cdot\log 2x}\right) = \frac{d}{dx}(3x\log 2x)\cdot e^{3x\cdot\log 2x} = \left(3\log 2x + 3x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot(2x)^{3x}.$$

Quesito 5 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\,dx$ è improprio e converge.

È improprio perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \infty$, e si vede che converge confrontando l'integrale con $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Quesito 6 Le soluzioni sono le funzioni

$$(ax+b)e^x \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha la la soluzione doppia $\lambda = 1$, e da ciò segue il risultato.

SECONDA PARTE

Problema 1

Dominio $= \mathbb{R}$

Continuità, derivabilità: f è continua, derivabile per $x \neq \pm 1$.

Asintoti: asintoto orizzontale $y = e^{\pi/2}$

Max. Min.: Minimo assoluto $= 1$, per $x = \pm 1$.

Massimo relativo per $x = 0$ (il valore è $e^{\pi/4}$).

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan|x^2-1|}}{1+|x^2-1|} \cdot \begin{cases} 2x & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty) \\ -2x & \text{se } x \in (-1, +1). \end{cases}$$

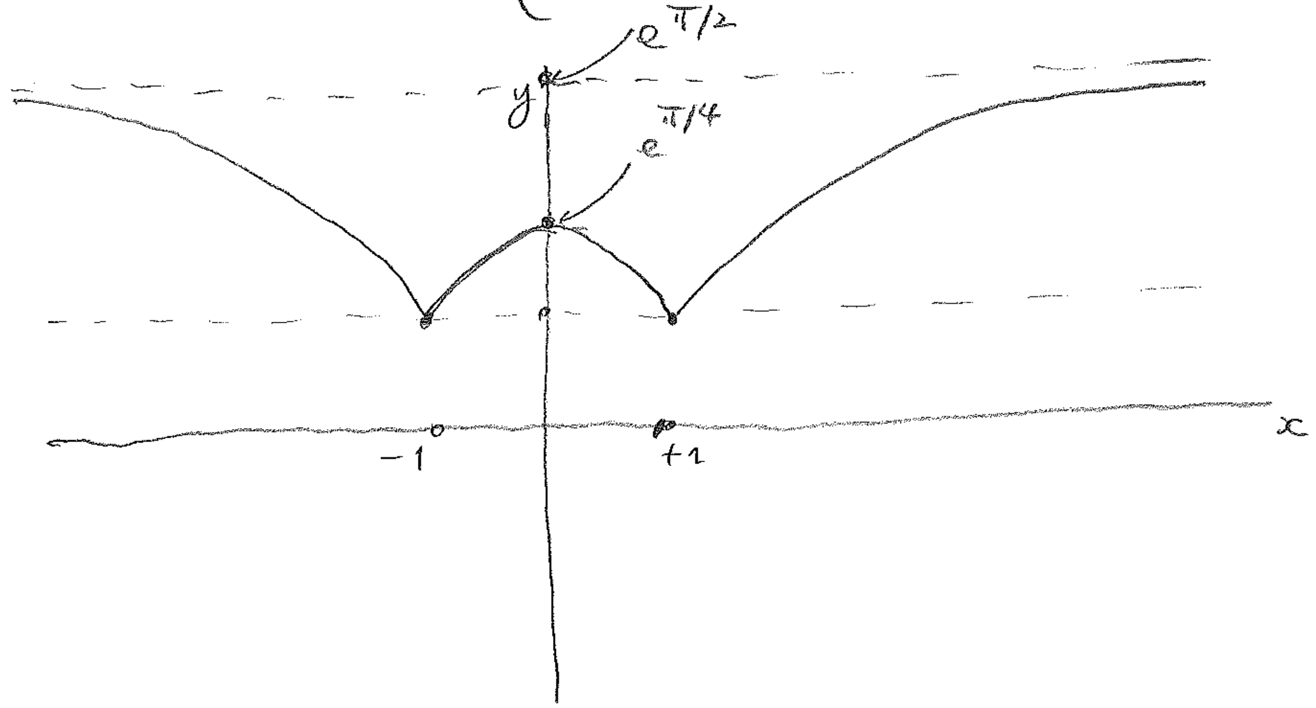

Grafico di $f(x)$.

Problema 2

(1) $\int -3\cos^2(3x)\,\mathrm{sen}^3(3x)\,dx$:

$3x = t$

$\int -\cos^2(t)\,\mathrm{sen}^2 t\,dt$

$\int -\mathrm{sen}\,t\,\cos^2(t)\,(1-\cancel{\cos}^2 t)\,dt$

$s = \cos t$ $\quad = \int s^2(1-s^2)\,ds$

$ds = -\mathrm{sen}\,t\,dt$

$= \frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5} + c$

$= \frac{1}{3}\cos^3(3x) - \frac{1}{5}\cos^5(3x) + c$

(2) Scriviamo $\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}$, e quindi

$$\int \frac{dt}{t(t-1)^2} = \log t - \log(t-1) - \frac{1}{t-1} + c = \log\left(\frac{t}{t-1}\right) - \frac{1}{t-1} + c.$$

Perciò

$$\int_2^3 \frac{dt}{t(t-1)^2} = \left[\log\left(\frac{t}{t-1}\right) - \frac{1}{t-1}\right]_2^3 = \frac{1}{2} + \log\left(\frac{3}{4}\right).$$

SECONDA PARTE

Quesito Teorico

(1) Supponiamo che f sia decrescente in $[a,b]$. Sia $x_0 \in (a,b)$.
Allora

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se $h>0$ allora $f(x_0+h) \leq f(x_0)$
e quindi $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$.

Segue che $f'(x_0) \leq 0$.

Supponiamo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Siano

$$a < x_1 < x_2 < b .$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $x_1 < \xi < x_2$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \leq 0$$

Quindi $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Siano $a=-1$, $b=1$ e $f: [-1,+1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x^3$.
La f è differenziabile, è strettamente decrescente
ma $f'(0) = 0 \not< 0$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è convergente per $x \in (-1,+1)$
divergente per $x \geq 1$
indeterminate per $x \leq -1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente ma <u>non</u> assolutamente convergente.