

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

17 dicembre 2004

1. Si determini l'insieme dei valori del parametro  $k$  per i quali la trasformazione lineare seguente è un isomorfismo:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow (-2x + 3y, x + ky, -x - y + kz)$$

verificato poi che  $k = 1$  è uno di tali valori si scriva la funzione  $f_1^{-1}$ .

(suggerimento: si utilizzi la matrice associata a  $f_1$ )

2. Determinare per quale valore del parametro  $k$  la trasformazione lineare seguente:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow (-x, ky + 2z, -x + z)$$

non è iniettiva. Per tale valore determinare  $\text{Ker}f$ , una sua base  $B$ , una base di  $\mathbb{R}^3$  contenente  $B$ , una base di  $\text{Im}f$ .

Verificare inoltre se la matrice  $A$  associata a tale  $f$  è diagonalizzabile determinandone gli autovalori e gli autovettori.

3. Calcolare gli autovalori della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

determinandone la molteplicità algebrica.

Costruire poi gli autospazi relativi agli autovalori trovati determinandone quindi la molteplicità geometrica.

Dire se la matrice è diagonalizzabile.

4. Determinare per quali valori di  $k$  è diagonalizzabile l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

esaminando per quali valori di  $k$  si ottengono tre autovalori reali e distinti e per quali invece si ottengono autovalori reali di molteplicità algebrica maggiore di uno; si studi quindi la dimensione degli autospazi relativi a tali autovalori.