

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

17 dicembre 2004

1. Si determini l'insieme dei valori del parametro k per i quali la trasformazione lineare seguente è un isomorfismo:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow (-2x + 3y, x + ky, -x - y + kz)$$

verificato poi che $k = 1$ è uno di tali valori si scriva la funzione f_1^{-1} .

(suggerimento: si utilizzi la matrice associata a f_1)

2. Determinare per quale valore del parametro k la trasformazione lineare seguente:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow (-x, ky + 2z, -x + z)$$

non è iniettiva. Per tale valore determinare $\text{Ker}f$, una sua base B , una base di \mathbb{R}^3 contenente B , una base di $\text{Im}f$.

Verificare inoltre se la matrice A associata a tale f è diagonalizzabile determinandone gli autovalori e gli autovettori.

3. Calcolare gli autovalori della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

determinandone la molteplicità algebrica.

Costruire poi gli autospazi relativi agli autovalori trovati determinandone quindi la molteplicità geometrica.

Dire se la matrice è diagonalizzabile.

4. Determinare per quali valori di k è diagonalizzabile l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

esaminando per quali valori di k si ottengono tre autovalori reali e distinti e per quali invece si ottengono autovalori reali di molteplicità algebrica maggiore di uno; si studi quindi la dimensione degli autospazi relativi a tali autovalori.