ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

10 dicembre 2004

1. Considerati i seguenti vettori dello spazio $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,0,2,-1),\ v_2 = (1,0,0,-1),\ v_3 = (0,0,1,-1),$$

$$v_4 = (0,0,1,0),\ v_5 = (0,1,0,1),\ v_6 = (-1,1,0,0),$$

determinare una base e quindi la dimensione dei seguenti sottospazi :

$$S =< v_1, v_3, v_5, v_6 >,\ T =< v_1, v_4, v_6 >,\ R =< v_2, v_4, v_5, v_6 >$$

$$S \cap T,\ S \cap R,\ T \cap R,\ S + T,\ S + R,\ T + R$$

2. Verificare che l'applicazione di dominio $V = \mathbb{R}^4$ e codominio lo spazio $V = \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\begin{array}{cccc} f & : & V & \longrightarrow & W \\ & & (a,b,c,d) & \longrightarrow & (a+c, a+b, a+2b-c) \end{array}$$

è lineare. Determinarne la matrice rispetto alle basi canoniche; calcolare il rango della matrice, trovare l'immagine e il nucleo di f.

Determinare quali fra i seguenti vettori appartengono al nucleo e quali all'immagine:

$$v_1 = (1,-2,0,1), v_2 = (-1,1,1,0), v_3 = (-3,0,1,2), v_4 = (2,-2,2,1)$$

$$w_1 = (1,2,3), w_2 = (1,2,0), w_3 = (2,1,0), w_4 = (1,1,1), w_1 = (-2,0,3)$$

3. Si determini $g((a,b,c))$ quando g è un'applicazione lineare di dominio $V = \\ = \mathbb{R}^3$ e codominio lo spazio $V = \mathbb{R}^4$ la cui matrice nelle basi canoniche è.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si determinino nucleo e immagine di g.

4. Si verifichi quali fra i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$, delle matrici quadrate 2×2 sui reali, sono costituiti da vettori indipendenti:

$$S_1 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_4 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

estrarre da ciascuno un sottoinsieme indipendente massimale.