ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

19 novembre 2004

1. Nel gruppo simmetrico $(\mathcal{S}_8, \circ)$ si considerino le seguenti permutazioni:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4$$
dove
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e l'ordine di σ e τ.
   (b) Per ciascuna delle precedenti permutazioni determinare la parità e scrivere almeno una decomposizione in trasposizioni.
   (c) Determinare ρ tale che $\tau\rho = \sigma^2$.
   (d) Calcolare ρ^{125}.

2. Nel gruppo simmetrico $(\mathcal{S}_{18}, \circ)$ si verifichi se esistono sottogruppi isomorfi ai seguenti gruppi:
$$(\mathbb{Z}_{84}, +), (\mathbb{Z}_{168}, +), (\mathbb{Z}_{81}, +), (\mathbb{U}_8, \cdot), (\mathcal{S}_{15}, \circ), (\mathcal{A}_{21}, \circ), (\mathcal{A}_3, \circ)$$

3. Verificare che l'applicazione:
$$\begin{array}{cccc} \alpha & : & (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ & & a + ib & \longrightarrow & a \end{array}$$
è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo Kerα e la partizione in classi laterali di Kerα in $\mathbb{C}$.

4. Verificare che l'applicazione:
$$\begin{array}{cccc} \gamma & : & (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{S}_4, \circ) \\ & & n & \longrightarrow & (1342)^n \end{array}$$
è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo Kerγ, l'immagine Imγ e la partizione in classi laterali di Kerγ in $\mathbb{Z}$.