

CORSO DI ALGEBRA

Introduzione alla teoria dei gruppi: ESERCIZI RIASSUNTIVI

- Provare che l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto all'operazione così definita

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

- Siano $(G_1, \square), (G_2, \triangle)$ due gruppi. Provare che $G_1 \times G_2$ è un gruppo rispetto all'operazione $*$

$$(g_1, g_2) * (g'_1, g'_2) = (g_1 \square g'_1, g_2 \triangle g'_2)$$

Inoltre $(G_1 \times G_2, *)$ è abeliano se e solo se $(G_1, \square), (G_2, \triangle)$ lo sono.

- Provare che $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ è un sottogruppo di \mathbb{R}^3
- Sia G un gruppo e $x, y \in G$. Provare che
 - (1) $y = xyx^{-1}$ se e solo se $xy = yx$;
 - (2) $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$;
 - (3) se $xyx^{-1} = y^2$, allora $x^3 y x^{-3} = y^8$.
- Sia G un gruppo; si provi che G è abeliano se e solo se $(ab)^2 = a^2 b^2$ per ogni $a, b \in G$.
- Sia G un gruppo; si provi che se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$ allora G è abeliano.
- Si provi che un gruppo infinito ha infiniti sottogruppi.
- Siano S, T sottogruppi di G , sia $ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}$. Si provi che ST è un sottogruppo di G se e solo se $ST = TS$ (Nota: la precedente è una uguaglianza di insiemi: in altri termini se $x = st$ con $s \in S, t \in T$, allora esistono $s' \in S, t' \in T$ tali che $x = t's'$ e simmetricamente se $x = t''s''$ allora $x = s'''t'''$).
- Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di S_n è un sottogruppo

$$H_1 = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\} \quad H_2 = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 2\}.$$

- Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo e $x \in G$. provare che

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

è un sottogruppo di G .

- Siano p, q due interi primi tra loro. Provare che il sottogruppo $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$ è ciclico generato da $\frac{1}{pq}$.
- Determinare esplicitamente nei seguenti gruppi, quando possibile, almeno un elemento $g \neq u$ di ordine finito

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad (\mathbb{Q}, +)$$

- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Scrivere gli elementi di $U(25)$ e determinarne gli ordini. Costruire il reticolo dei sottogruppi.
- Determinare tutti i sottogruppi di \mathbb{Z}_{18} e le relative unioni e intersezioni.
- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Provare che $U(15)$ e $U(20)$ non sono ciclici. Determinare tutti i loro sottogruppi di ordine 4.
- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Determinare $U(24)$, $U(16)$ e la loro tabella moltiplicativa. Determinare la tabella additiva di \mathbb{Z}_8 . Verificare se tali tabelle corrispondono allo stesso gruppo.
- Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:
 - (a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g , $H = \langle g^2 \rangle$.
 - (b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g , $H = \langle g^5 \rangle$.
 - (c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\}$.
- Si determinino i sottogruppi, i generatori e gli elementi (moltiplicativamente) invertibili di \mathbb{Z}_{20} , \mathbb{Z}_{48} , \mathbb{Z}_{211} .
- In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le precedenti come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; precisarne infine il segno. Determinare $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\gamma$ e il loro ordine.

- Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine 13, 26, 35.
- Qual'è il massimo ordine che può avere un elemento di S_{10} ?
- Quale delle seguenti applicazioni tra gruppi sono omomorfismi?
 - (1) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + 1.$
 - (2) $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad f(x) = e^{3x}.$
 - (3) $f : S_5 \rightarrow S_5, \quad f(\sigma) = g \circ \sigma$ ove g è la permutazione che scambia 1 e 3.
 - (4) $f : G \rightarrow G, \quad f(x) = axa^{-1}$ ove a è un fissato elemento di G .

- Provare che $f : G \rightarrow G, f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.
- Provare che $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \forall x \in G\}$ è un sottogruppo normale di G . Chi è $Z(G)$ se G è abeliano?
- Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.
- (a) Dimostrare che se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un omomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.
 - (b) Dimostrare che se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.
 - (c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.