CORSO DI ALGEBRA
Introduzione alla teoria dei gruppi: ESERCIZI RIASSUNTIVI

• Provare che l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto all'operazione cosi' definita

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

• Siano $(G_1, \Box)$, $(G_2, \triangle)$ due gruppi. Provare che $G_1 \times G_2$ è un gruppo rispetto all'operazione $*$

$$(g_1, g_2) * (g_1', g_2') = (g_1 \Box g_1', g_2 \triangle g_2')$$

Inoltre $(G_1 \times G_2, *)$ è abeliano se e solo se $(G_1, \Box)$, $(G_2, \triangle)$ lo sono.

• Provare che $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ è un sottogruppo di $\mathbb{R}^3$

• Scrivere la tabella di moltiplicazione del gruppo D generato da due elementi s, t tali che

$$s^4 = 1, \qquad , t^2 = 1, \qquad ts = s^{-1}t$$

• Sia G un gruppo e $x, y \in G$. Provare che

(1) $y = xyx^{-1}$ se e solo se $xy = yx$;
(2) $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$;
(3) se $xyx^{-1} = y^2$, allora $x^3yx^{-3} = y^8$.

• Sia G un gruppo; si provi che G è abeliano se e solo se $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni $a, b \in G$.

• Sia G un gruppo; si provi che se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$ allora G è abeliano.

• Si provi che un gruppo infinito ha infiniti sottogruppi.

• Siano S, T sottogruppi di G, sia $ST = \{st \mid s \in S,\ t \in T\}$. Si provi che ST è un sottogruppo di G se e solo se $ST = TS$ (Nota: la precedente è una uguaglianza di insiemi: in altri termini se $x = st$ con $s \in S$, $t \in T$, allora esistono $s' \in S$, $t' \in T$ tali che $x = t's'$ e simmetricamente se $x = t''s''$ allora $x = s'''t'''$).

• Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di S_n è un sottogruppo

$$H_1 = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\} \quad H_2 = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 2\}.$$

• Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo e $x \in G$. provare che

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

è un sottogruppo di G.

• Siano p, q due interi primi tra loro. Provare che il sottogruppo $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$ è ciclico generato da $\frac{1}{pq}$.

• Determinare esplicitamente nei seguenti gruppi, quando possibile, almeno un elemento $g \neq u$ di ordine finito

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad (\mathbb{Q}, +)$$

• Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$. Scrivere gli elementi di $U(25)$ e determinarne gli ordini. Costruire il reticolo dei sottogruppi.

• Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{18}$ e le relative unioni e intersezioni.

• Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$. Provare che $U(15)$ e $U(20)$ non sono ciclici. Determinare tutti i loro sottogruppi di ordine 4.

• Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$. Determinare $U(24)$, $U(16)$ e la loro tabella moltiplicativa. Determinare la tabella additiva di $\mathbb{Z}_8$. Verificare se tali tabelle corrispondono allo stesso gruppo.

• Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:
  (a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^2 >$.
  (b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^5 >$.
  (c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\}$.

• Si determinino i sottogruppi, i generatori e gli elementi (moltiplicativamente) invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{48}$, $\mathbb{Z}_{211}$.

• In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le precedenti come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; precisarne infine il segno. Determinare $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\gamma$ e il loro ordine.

• Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine 13, 26, 35.

• Qual'è il massimo ordine che può avere un elemento di S_{10} ?

• Quale delle seguenti applicazioni tra gruppi sono omomorfismi?
  (1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + 1$.
  (2) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad f(x) = e^{3x}$.
  (3) $f : S_5 \to S_5, \quad f(\sigma) = g \circ \sigma$ ove g è la permutazione che scambia 1 e 3.
  (4) $f : G \to G, \quad f(x) = axa^{-1}$ ove a è un fissato elemento di G.

• Provare che $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

• Provare che $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg\, \forall x \in G\}$ è un sottogruppo normale di G. Chi è $Z(G)$ se G è abeliano?

• Sia $f : G \to H$ un omomorfismo non nullo di gruppi. Provare che se G ha ordine primo allora f è iniettivo. Provare che se H ha ordine primo allora H è suriettivo.

• Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.

• (a) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un omomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.

(b) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.

(c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.