

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

12 novembre 2004

1. Verificare quali fra le seguenti relazioni in  $(\mathbb{Z}_{15}, +)$  sono di equivalenza, verificando la validità o meno delle tre proprietà, riflessiva, simmetrica e transitiva:

$$\begin{aligned} \rho_1 & : \bar{a}\rho_1\bar{b} \iff \bar{a} - \bar{b} \in \{\bar{5}, \bar{10}\} \\ \rho_2 & : \bar{a}\rho_2\bar{b} \iff \bar{a} - \bar{b} \in \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \\ \rho_3 & : \bar{a}\rho_3\bar{b} \iff \bar{a} - \bar{b} \in \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{9}\} \end{aligned}$$

2. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono fra loro isomorfi:

$$(\mathbb{U}_{15}, \cdot), (\mathbb{Z}_4, +), (\mathbb{U}_8, \cdot), (\mathbb{Z}_8, +), (\mathbb{U}_{12}, \cdot), (\langle \rho \rangle, \circ)$$

dove  $\rho$  è una rotazione nel piano di centro un punto fissato e angolo  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Scrivere un isomorfismo nei casi possibili.

3. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono ciclici:

$$(\mathbb{U}_{36}, \cdot), (\mathbb{Z}_{209}, +), (\mathbb{U}_{25}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot)$$

Per i gruppi finiti scrivere tutti i possibili sottogruppi.

4. Si considerino i seguenti due gruppi  $H = \mathbb{U}_{12}$  e  $K = \mathcal{S}_3$ ; per tali gruppi si definiscano le seguenti applicazioni:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : H & \longrightarrow & H & \beta : K & \longrightarrow & K \\ & & x & \longrightarrow & x^2 & & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

Si dimostri che  $\alpha$  è un omomorfismo e si verifichi con un controesempio che  $\beta$  non è un omomorfismo.

5. Si calcolino i rappresentanti canonici ( $a : 0 \leq a \leq n - 1$ ), per le seguenti classi in  $\mathbb{Z}_n$ , per  $n = 7$ :

$$\overline{-1395}, \overline{393}, \overline{-4795}, \overline{574}, \overline{2394}.$$

Si calcolino poi le potenze  $\bar{a}^t$ , per  $a$  variabile nei valori precedentemente trovati e  $t \in \{1579, -467, 580\}$ .

Si ripeta l'esercizio per  $n = 6$ .

6. Si scriva la decomposizione in cicli disgiunti dei seguenti elementi del gruppo  $S_7$ :

$$\begin{aligned} \tau_1 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \tau_2 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau_3 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \tau_4 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e se ne calcolino gli ordini.