ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

12 novembre 2004

1. Verificare quali fra le seguenti relazioni in $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ sono di equivalenza, verificando la validità o meno delle tre proprietà, riflessiva, simmetrica e transitiva:
$$\begin{array}{lcccl} \rho_1 & : & \overline{a}\rho_1\overline{b} & \Longleftrightarrow & \overline{a}-\overline{b} \in \{\overline{5}, \overline{10}\} \\ \rho_2 & : & \overline{a}\rho_2\overline{b} & \Longleftrightarrow & \overline{a}-\overline{b} \in \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\} \\ \rho_3 & : & \overline{a}\rho_3\overline{b} & \Longleftrightarrow & \overline{a}-\overline{b} \in \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{9}\} \end{array}$$

2. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono fra loro isomorfi:
$$(\mathbb{U}_{15}, \cdot), (\mathbb{Z}_4, +), (\mathbb{U}_8, \cdot), (\mathbb{Z}_8, +), (\mathbb{U}_{12}, \cdot), (<\rho>, \circ)$$
dove ρ è una rotazione nel piano di centro un punto fissato e angolo $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Scrivere un isomorfismo nei casi possibili.

3. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono ciclici:
$$(\mathbb{U}_{36}, \cdot), (\mathbb{Z}_{209}, +), (\mathbb{U}_{25}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot)$$
Per i gruppi finiti scrivere tutti i possibili sottogruppi.

4. Si considerino i seguenti due gruppi $H = \mathbb{U}_{12}$ e $K = \mathcal{S}_3$; per tali gruppi si definiscano le seguenti applicazioni:
$$\begin{array}{lcccc} \alpha & : & H & \longrightarrow & H \\ & & x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} \beta & : & K & \longrightarrow & K \\ & & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$
Si dimostri che α è un omomorfismo e si verifichi con un controesempio che β non è un omomorfismo.

5. Si calcolino i rappresentanti canonici $(a : 0 \leq a \leq n-1)$, per le seguenti classi in $\mathbb{Z}_n$, per $n = 7$:
$$\overline{-1395},\ \overline{393},\ \overline{-4795},\ \overline{574},\ \overline{2394}.$$
Si calcolino poi le potenze $\overline{a}^t$, per a variabile nei valori precedentemente trovati e $t \in \{1579, -467, 580\}$.
Si ripeta l'esercizio per $n = 6$.

6. Si scriva la decomposizione in cicli disgiunti dei seguenti elementi del gruppo S_7:
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
e se ne calcolino gli ordini.