

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

5 novembre 2004

1. Si costruiscano tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi: $G = (\mathbb{Z}_{143}, +)$, $G' = (\mathbb{Z}_{30}, +)$, $G'' = (\mathbb{Z}_{36}, +)$ e si studino i grafici delle relative inclusioni. Si confrontino tali grafici con i rispettivi grafici, ottenuti dalla relazione d'ordine della divisibilità, dei divisori positivi di 143, 30 e 36.
2. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $c, d \geq 0$; supponendo che $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ ci si chiede se $a^c \equiv b^d \pmod{n}$. Dimostrarlo o dare un controesempio.
3. Considerati i seguenti sottoinsiemi dell'insieme \mathbb{Z}_{18} :

$$\{\bar{0}, \bar{7}, \bar{11}\}, \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{13}, \bar{3}, \bar{15}\},$$

$$\{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}, \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{11}\}, \{\bar{1}, \bar{17}\}, \{\bar{1}, \bar{13}\},$$

si verifichi se qualcuno di essi è un sottogruppo di uno dei gruppi:

$$(\mathbb{Z}_{18}, +) \quad \text{o} \quad (\mathbb{U}_{18}, \cdot)$$

(Si consiglia di cercare delle motivazioni teoriche per escludere alcuni casi)

4. Considerato il gruppo additivo dei razionali, $(\mathbb{Q}, +)$, si determini il minimo sottogruppo H contenente il sottoinsieme $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$; dimostrare che esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che H risulti essere il minimo sottogruppo contenente $\frac{m}{n}$.
5. Nel gruppo $G = (\mathbb{U}_{21}, \cdot)$ si consideri il sottogruppo minimo S contenente l'elemento $\bar{4}$; si determini la partizione in classi laterali destre di S in G e si verifichi che essa coincide con la partizione in classi laterali sinistre. Ripetere l'esercizio per altri sottogruppi di G .