

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

29 ottobre 2003

1. Calcolare il massimo comun divisore $d = (4617, 6878)$ e scrivere la relativa identità di Bézout.
2. Costruire le tabelle additive e moltiplicative di $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, per $m = 4$, $m = 7$, $m = 8$; determinare nei diversi casi, quando esistono, gli inversi moltiplicativi.

3. Considerati i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3t + 2, t \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x = 5t + 1, t \in \mathbb{Z}\}$$

si dimostri che per l'intersezione $A \cap B$ risulta:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : x = 15t + 11, t \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Ricordando le proprietà che caratterizzano i sottogruppi determinare tutti i sottogruppi del gruppo (\mathbb{U}_{12}, \cdot)
5. Considerato il gruppo $G = (\mathbb{Z}_{3762}, +)$ ricordare la condizione per cui una classe $\bar{a} \in G$ appartenga al gruppo $G'(\mathbb{U}_{3762}, \cdot)$.

Dire quali fra i seguenti elementi appartengono a G' :

$$\overline{95}, \overline{1847}, \overline{4}, \overline{1859}, \bar{a}$$

e determinarne, quando possibile, l'inverso.

6. Costruire, utilizzando le nozioni fin qui note sui gruppi, le tabelle moltiplicative possibili per un gruppo G di ordine quattro $G = \{u, a, b, c\}$.
(a meno del "nome" degli elementi)
7. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo \mathbb{Z}_{12} le relative unioni e intersezioni, disegnare il reticolo di tali sottogruppi.
(Si ricordi che i sottogruppi di tale gruppo possono avere soltanto d elementi, per d che divide 12.)