PROVA SCRITTA DEL 14-6-2001

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si consideri la retta r

$$r : \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per la retta s passante per il punto P di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ perpendicolare e incidente a r.

(b) Calcolare la distanza di P da r.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$ presa come base di partenza in $\mathbb{R}^4$ e a $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di arrivo in $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare una base per $Ker(F)$ e una per $Im(F)$.
(c) Si determini $F^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini una base del sottospazio $W^{\perp}$, ortogonale a W rispetto al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$.

(b) Si verifichi, motivando la risposta, che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e tale che $Ker(F) = W^{\perp}$.

Determinare poi la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo.

(c) Si dica se F è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$ e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

(a) Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Si definisca la matrice di g rispetto a $\mathcal{B}$.

(b) Si defnisca il nucleo di g e si indichi, motivando la risposta, un metodo per la sua determinazione.

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $g(X, Y) = X^t\,A\,Y$, ove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che g è definita positiva.

(b) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a g.