Esame del 13-6-2002

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Si considerino i punti A, B di coordinate rispettive $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sia r la retta passante per A, B ed sia s la retta di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$.

(a) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(b) Determinare un'equazione cartesiana per il piano π passante per l'origine e parallelo ad r, s.

Esercizio 2. In $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e il sottospazio W formato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare basi per U e W.

(b) Determinare una base per $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

(c) Completare la base di $U + W$ determinata nella parte (b) a una base di $\mathbb{R}^4$; determinare, rispetto a tale base, le coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to V$ determinata dalle condizioni seguenti:

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ presa come base di partenza e alla base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ presa come base di arrivo in V.

(b) Calcolare $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix})$.

(c) Determinare basi per $Ker(F)$ e per $Im(F)$.

Esercizio 4. Siano V, W spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di nucleo $Ker(F)$ e immagine $Im(F)$ per l'applicazione F.

(b) Si provi che F è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{0\}$.

Esercizio 5. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di F e dire se F è diagonalizzabile.

(b) Determinare gli autovettori di F.

(c) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di F è diagonale.