

# Indice analitico

condizione di Cauchy, 14

continuità, 13

convergenza

- di una successione crescente di funzioni semplici verso una funzione sommabile, 127
- in  $L^p(E)$  implica in  $L^q(E)$  se  $p > q$  e  $m(E) < +\infty$ , 95
- in  $L^p(E)$  implica in misura, 93
- in  $L^p(E)$  implica quasi ovunque per sottosuccessioni, 93
- in  $L^p(E)$  non implica quasi ovunque, 93
- in  $L^\infty(E)$  è la uniforme quasi ovunque, 94
- in misura, 77
- in misura implica quasi ovunque per sottosuccessioni, 78
- in misura non implica quasi ovunque, 93
- lemma di Riemann-Lebesgue in  $L^1([-\pi, \pi])$ , 110
- lemma di Riemann-Lebesgue in  $L^2([-\pi, \pi])$ , 105
- quasi ovunque, 46
- quasi ovunque implica in misura se  $m(E) < +\infty$ , 79
- quasi ovunque non implica in misura se  $m(E) = +\infty$ , 78
- schema riassuntivo, 95

distanza, 2

- discreta, 2
- disuguaglianza triangolare, 2
- positività, 2
- simmetria, 2

disuguaglianza

- di Bessel, 101

- di Cauchy-Schwartz in  $\mathbf{R}^N$ , 3
- di Cauchy-Schwartz per successioni, 7
- di Chebyshev, 73
- di Hölder in  $\mathbf{R}^N$ , 5
- di Hölder per funzioni continue, 10
- di Hölder per successioni, 7
- di Young, 4

funzione a gradino, 54

funzione di Dirichlet, 55

funzioni misurabili, 44

- $f^+$ ,  $f^-$  e  $|f|$ , 46
- sup, inf, lim sup, lim inf e lim, 45
- continuità a meno di insiemi di misura piccola, 47, 86
- convergenza quasi uniforme, 50, 51
- formano uno spazio vettoriale, 44
- funzioni caratteristiche, 47
- funzioni continue, 44
- funzioni semplici, 47, 56
  - rappresentazione canonica, 56
- restrizioni ad insiemi misurabili di funzioni misurabili, 44
- uguali quasi ovunque, 46

insieme aperto, 12

insieme chiuso, 12

insiemi misurabili

- secondo Lebesgue, 29
  - $\sigma$ -additività, 32
  - $\sigma$ -algebra dei misurabili, 39
  - finita additività, 31, 32
  - i rettangoli in  $\mathbf{R}^N$ , 119, 121
  - insieme non misurabile, 40
  - insiemi con la stessa misura di un numerabile in  $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ , 122
  - insiemi misurabili, aperti e chiusi, 38
  - invarianza per traslazioni, 36

- le intersezioni numerabili di unioni numerabili di rettangoli in  $\mathbf{R}^N$ , 121
  - le unioni numerabili di rettangoli in  $\mathbf{R}^N$ , 121
  - misurabilità degli aperti, 37
  - misurabilità degli insiemi di misura esterna nulla, 30
  - misurabilità degli intervalli, 37
  - misurabilità dei chiusi, 37
  - misurabilità dell'unione finita, 30
  - misurabilità delle semirette, 36
  - successioni monotone crescenti, 34
  - successioni monotone decrescenti, 34
  - secondo Peano-Jordan, 23
- integrale secondo Lebesgue
- funzioni misurabili e limitate
    - additività, 63
    - definizione, 62
    - funzioni uguali quasi ovunque, 63
    - integrabilità, 60
    - integrale inferiore, 59
    - integrale superiore, 59
    - monotonia, 63
    - su unioni finite di insiemi misurabili, 63
    - teorema di convergenza limitata, 66
  - funzioni non negative
    - additività, 69
    - definizione, 68
    - integrabilità per serie, 72
    - lemma di Fatou, 70
    - monotonia, 69
    - su unioni numerabili di insiemi misurabili, 72
    - teorema di Beppo Levi, 71
  - funzioni sommabili
    - additività, 75
    - assoluta continuità dell'integrale, 74
    - definizione per funzioni di segno qualsiasi, 75

- definizione per funzioni non negative, 73
  - finite quasi ovunque, 73
  - monotonia, 75
  - su unioni finite di insiemi misurabili, 75
  - teorema di Lebesgue, 76
  - teorema di Lebesgue generalizzato, 79
  - teorema di Vitali, 79
  - integrabilità delle funzioni integrabili secondo Riemann, 63
  - integrale di funzioni semplici, 56
    - additività, 57
    - indipendenza dalla rappresentazione, 57, 59
    - monotonia, 57
- integrale secondo Riemann
- definizione, 54
  - integrale inferiore, 53
  - integrale inferiore e funzioni a gradino, 55
  - integrale superiore, 53
  - integrale superiore e funzioni a gradino, 55
  - somme inferiori, 53
  - somme superiori, 53
- limitatezza, 13
- lunghezza di un intervallo
- in  $\mathbf{R}$ , 25
  - in  $\mathbf{R}^N$ , 113
- lunghezza di un intervallo aperto, 23
- massimo limite, 45
- minimo limite, 45
- misura di Lebesgue, 40
- di un rettangolo, 116
  - in  $\mathbf{R}^N$ , 114
- misura esterna
- secondo Lebesgue, 25
    - $\sigma$ -subadditività, 28
    - estensione, 26

- in  $\mathbf{R}^N$  a partire dagli intervalli, 113
  - in  $\mathbf{R}^N$  a partire dagli intervalli è la stessa a partire dai rettangoli, 118
  - in  $\mathbf{R}^N$  a partire dai rettangoli, 117
  - invarianza per traslazioni, 29
  - monotonia, 26
  - regolarità, 26
  - secondo Peano-Jordan, 23
- misura interna
- secondo Peano-Jordan, 23
- misura secondo Peano-Jordan, 23
- partizione di un intervallo, 53
- pluriintervallo, 23
- quasi ovunque, 46
- razionali
- misurabili secondo Lebesgue, 30
  - non misurabili secondo Peano-Jordan, 24
- rettangolo, 116
- semi-algebra
- definizione, 114
  - estensione di una misura, 115
  - gli intervalli di  $\mathbf{R}^N$ , 114
  - i rettangoli di  $\mathbf{R}^N$ , 116
- separabilità
- $(L^\infty(\mathbf{R}), d_\infty)$  non è separabile, 99
  - definizione, 97
  - di  $(L^p(E), d_p)$ , 98
  - di  $(L^p(\mathbf{R}), d_p)$ , 97
- sezione di un insieme misurabile
- definizione, 123
  - misurabilità della funzione  $m(E_x)$ , 125
  - misurabilità delle sezioni di insiemi in  $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ , 123
  - misurabilità per ogni  $x$  della misura di  $E_x$ , se  $E$  è in  $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ , 124

- misurabilità per quasi ogni  $x$  di  $E_x$ , 125
- misurabilità per quasi ogni  $x$  di  $E_x$  se  $m_2(E) = 0$ , 125
- sfera aperta, 11
- spazi metrici
  - $(C(X, Y), d_\infty)$ , 13
  - $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_1)$ , 9
  - $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_p)$ , 10
  - $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$ , 9
  - $(C^1([a, b], \mathbf{R}), d_{\infty,1})$ , 11
  - $(C^1([a, b], \mathbf{R}), \bar{d}_{\infty,1})$ , 11
  - $(C^1([a, b], \mathbf{R}), \tilde{d}_{\infty,1})$ , 11
  - $(L(X, Y), d_\infty)$ , 13
  - $(L^2(E), d_2)$ 
    - prodotto scalare, 99
  - $(L^1(E), d_1)$ , 81
    - convergenza totale, 82
    - convergenza totale implica convergenza, 83
    - densità delle funzioni continue, 86
  - $(L^p(E), d_p)$ , 88
    - densità delle funzioni continue, 89
  - $(L^\infty(E), d_\infty)$ , 89
  - $(\ell^p, d_p)$ , 8
  - $(\ell^\infty, d_\infty)$ , 9
  - $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ , 2
  - $(\mathbf{R}^N, d_2)$ , 3
  - $(\mathbf{R}^N, d_p)$ , 6
  - $(\mathbf{R}^N, d_\infty)$ , 7
  - definizione, 2
  - densità, 19
  - isometria, 19
  - metrica discreta, 2
- spazi metrici completi
  - $(C(X, Y), d_\infty)$  se  $Y$  è completo, 15
  - $(C^0([a, b]), d_1)$  non è completo, 17
  - $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$ , 16

- $(L(X, Y), d_\infty)$  se  $Y$  è completo, 15
  - $(L^1([-\pi, \pi]), d_1)$ 
    - la serie di Fourier può divergere ovunque, 111
    - lemma di Riemann-Lebesgue, 110
  - $(L^2([-\pi, \pi]), d_2)$ 
    - convergenza della serie di Fourier di funzioni caratteristiche, 107
    - convergenza quasi ovunque della serie di Fourier, 110
    - lemma di Riemann-Lebesgue, 105
    - sistema ortogonale trigonometrico, 104
    - sistema ortogonale trigonometrico è completo, 108
  - $(L^\infty([-\pi, \pi]), d_\infty)$ 
    - la serie di Fourier non converge, 112
  - $(L^1(E), d_1)$ , 85
  - $(L^p(E), d_p)$ , 89
  - $(L^\infty(E), d_\infty)$ , 90
  - $(\ell^p, d_p)$ , 16
  - $(\ell^\infty, d_\infty)$ , 16
  - completezza dei sottoinsiemi chiusi, 15
  - definizione, 14
  - spazi di Hilbert, 100
  - spazi di Hilbert separabili
    - coefficienti di Fourier, 102
    - identità di Parseval, 101
    - isometria biunivoca fra  $(H, d)$  e  $(\ell^2, d_2)$ , 103
    - sistema ortonormale completo, 100
  - teorema di completamento, 19
- successioni convergenti, 12
- unicità del limite, 12
- teorema di Fubini-Tonelli
- applicazione al calcolo dell'integrale di  $|f(x)|^p$ , 130
  - per funzioni caratteristiche, 126
  - per funzioni misurabili, 128
  - per funzioni sommabili, 128