

Capitolo 5

Misure prodotto

5.1 Definizione della misura in \mathbf{R}^2

Nell'introdurre la misura secondo Lebesgue in \mathbf{R} , abbiamo definito la misura esterna di un sottoinsieme qualsiasi E come

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l(I_j), \{I_j\}_{j \in J} \begin{array}{l} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di intervalli aperti} \end{array} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j \right\},$$

essendo $l(I)$ la lunghezza di un intervallo (definita in maniera naturale). Per definire la misura esterna di un sottoinsieme di \mathbf{R}^N è allora sufficiente definire la lunghezza di un intervallo I di \mathbf{R}^N : se

$$I = I_1 \times \dots \times I_N$$

con gli I_j intervalli di \mathbf{R} , allora

$$l_N(I) = l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_N).$$

Una volta definita la lunghezza di un intervallo, la misura esterna N -dimensionale di un sottoinsieme E di \mathbf{R}^N è data da

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l_N(I_j), \{I_j\}_{j \in J} \begin{array}{l} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di intervalli aperti} \end{array} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j \right\}.$$

Una volta definita m_N^* , si dimostra che essa gode di tutte le proprietà dimostrate a suo tempo per m^* : che è monotona, regolare, che coincide con l_n

sugli intervalli di \mathbf{R}^N , è σ -subadditiva ed invariante per traslazioni. Detto misurabile un sottoinsieme E di \mathbf{R}^N tale che

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subseteq \mathbf{R}^N,$$

la famiglia \mathcal{M}_N degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una σ -algebra che contiene gli intervalli, gli aperti ed i chiusi, e che verifica tutte le proprietà dimostrate a suo tempo per la famiglia degli insiemi misurabili su \mathbf{R} . Su di essa è definita la misura di Lebesgue N -dimensionale m_N .

In altre parole, una volta scelti i “mattoni base” (gli intervalli), e definita la misura su di essi, quasi tutte le proprietà della misura esterna (e, di conseguenza, della misura e degli insiemi misurabili) discendono solo dalla sua definizione. Quasi tutte le proprietà, tranne una: il fatto che, sugli intervalli, coincida con la lunghezza; ovvero, che m_N^* sia un'estensione di l_N . Questo fatto è conseguenza della “struttura” particolare della famiglia degli intervalli di \mathbf{R}^N , e delle proprietà della lunghezza relativamente alle unioni di intervalli.

Definizione 5.1.1 Un sottoinsieme \mathcal{C} di $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ si dice una **semi-algebra** se

- i) per ogni C_1, C_2 in \mathcal{C} , si ha $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$;
- ii) per ogni C in \mathcal{C} , C^c è unione disgiunta e finita di elementi di \mathcal{C} .

La famiglia \mathcal{C} degli intervalli di \mathbf{R}^N è una semi-algebra, come si verifica facilmente; in particolare, se $N = 2$, e I è un intervallo di \mathbf{R}^2 , $I = I_1 \times I_2$ e

$$I^c = (\mathbf{R} \times I_2^c) \cup (I_1^c \times I_2) = (I_1^c \times \mathbf{R}) \cup (I_1 \times I_2^c),$$

e l'unione è disgiunta (si noti che il complementare di I non si scrive in modo unico come unione disgiunta).

Come si verifica facilmente, la funzione lunghezza, definita sulla semi-algebra degli intervalli, è σ -subadditiva: se I è un intervallo di \mathbf{R}^N , unione di una famiglia numerabile di intervalli $\{I_n\}$, allora

$$l_N(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l_N(I_n).$$

Questo fatto fa sì che la misura esterna di un intervallo coincida con la sua lunghezza. Infatti, se I è un intervallo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste I_ε intervallo aperto contenente I e tale che $l_N(I_\varepsilon) \leq l_N(I) + \varepsilon$; pertanto

$$m_N^*(I) \leq l_N(I_\varepsilon) \leq l_N(I) + \varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_n\}$ che ricopre I e tale che

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} l_N(I_n) \leq m_N^*(I) + \varepsilon.$$

Ma allora $\{I_n \cap I\}$ è una famiglia al più numerabile di intervalli la cui unione è I , e quindi

$$m_N^*(I) - \varepsilon \leq l_N(I) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} l_N(I_n \cap I) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} l_N(I_n) \leq m_N^*(I) + \varepsilon,$$

da cui (per l'arbitrarietà di ε) $l_N(I) = m_N^*(I)$.

Il fatto che la misura esterna di un intervallo sia la sua lunghezza (assieme alla σ -subadditività della misura esterna) implica poi che gli intervalli siano misurabili (si veda la dimostrazione del Teorema 2.3.10).

Ricapitolando, siamo partiti dalla semi-algebra degli intervalli e dalla funzione lunghezza (che è σ -subadditiva), e abbiamo costruito una misura esterna (e quindi la famiglia degli insiemi misurabili), ottenendo che la misura esterna coincide con la lunghezza sugli intervalli, e che gli intervalli sono misurabili.

L'unico punto di tutto il discorso nel quale è stato usato il fatto che avevamo a che fare *proprio* con la semi-algebra degli intervalli e con la lunghezza è stato nell'usare il fatto che la lunghezza era monotona e σ -subadditiva. In altre parole, è valido il seguente teorema.

Teorema 5.1.2 *Sia \mathcal{C} una semi-algebra di sottoinsiemi di \mathbf{R}^N , e sia $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione di insieme monotona e σ -subadditiva su \mathcal{C} ; ovvero, se C in \mathcal{C} è unione numerabile di una famiglia $\{C_n\}$ di insiemi di \mathcal{C} , allora*

$$\mu(C) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu(C_n).$$

Definiamo, per ogni E sottoinsieme di \mathbf{R}^N ,

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} \mu(C_j), \{C_j\}_{j \in J} \begin{array}{l} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di insiemi di } \mathcal{C} \end{array} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j \right\}.$$

Allora μ^* è una misura esterna (ovvero, è monotona e σ -subadditiva) tale che $\mu^*(C) = \mu(C)$ per ogni C in \mathcal{C} . Inoltre, detto “misurabile” un insieme E tale che

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subseteq \mathbf{R}^N,$$

la famiglia degli insiemi misurabili è una σ -algebra che contiene \mathcal{C} .

È allora possibile definire una misura esterna su \mathbf{R}^N in un'altra maniera: non partendo dagli intervalli, ma partendo da una semi-algebra più “raffinata”.

Definizione 5.1.3 Un rettangolo di \mathbf{R}^N è il prodotto cartesiano di N insiemi misurabili secondo Lebesgue di \mathbf{R} :

$$R = E_1 \times \dots \times E_N, \quad E_i \in \mathcal{M}.$$

La misura di un rettangolo di \mathbf{R}^N è definita — in maniera naturale — come il prodotto delle misure degli E_i :

$$\mu(R) = m(E_1) \cdot \dots \cdot m(E_N).$$

Teorema 5.1.4 Sia \mathcal{R} la famiglia dei rettangoli di \mathbf{R}^N . Allora \mathcal{R} è una semi-algebra; inoltre, la funzione μ è monotona e σ -subadditiva su \mathcal{R} .

Dimostrazione. Il fatto che \mathcal{R} sia una semi-algebra è di dimostrazione immediata, così come lo è la monotonia di μ . Rimane pertanto da verificare la σ -subadditività di μ . Per semplicità, limitamoci al caso $N = 2$. Sia allora R un rettangolo di \mathbf{R}^2 , unione di una famiglia numerabile di rettangoli di \mathbf{R}^2 :

$$A \times B = R = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \times B_n.$$

Sia x in A fissato; allora x appartiene ad alcuni degli A_n ; sia $N_x = \{n \in \mathbf{N} : x \in A_n\}$. Si ha allora

$$B = \bigcup_{n \in N_x} B_n.$$

Infatti, sia y in B ; allora (x, y) è in $A \times B$ e quindi esiste m in \mathbf{N} tale che (x, y) è in $A_m \times B_m$. Poiché x è in A_m , m è in N_x e quindi y è nell'unione dei B_n con n in N_x (essendo y in B_m). Viceversa, se y è nell'unione dei B_n con n in N_x , allora y è in B_m per qualche m in N_x e quindi (x, y) è in $A_m \times B_m$, ovvero in $A \times B$. Essendo i B_n misurabili, si ha

$$m(B) \leq \sum_{n \in N_x} m(B_n).$$

Osserviamo ora che $m(B_n)$ è uno degli addendi della somma precedente se e solo se x è in A_n , e che quindi si può scrivere (ricordiamo che x è fissato)

$$m(B) \leq \sum_{n \in N_x} m(B_n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(B_n) \chi_{A_n}(x).$$

Consideriamo ora la funzione caratteristica $\chi_A(x)$. Si ha allora, essendo $\chi_{A_n}(x) \chi_A(x) = \chi_{A_n}(x)$,

$$m(B) \chi_A(x) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} m(B_n) \chi_{A_n}(x) \chi_A(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(B_n) \chi_{A_n}(x).$$

Per uno dei corollari del teorema di convergenza monotona, si ha

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} m(B_n) \chi_{A_n}(x) \right) dx = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(B_n) \int_{\mathbf{R}} \chi_{A_n}(x) dx = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(A_n) m(B_n),$$

da cui la tesi per la monotonia dell'integrale e per definizione di μ , essendo

$$\int_{\mathbf{R}} m(B) \chi_A(x) dx = m(A) m(B).$$

■

Possiamo allora definire μ_N^* sui sottoinsiemi di \mathbf{R}^N nel seguente modo:

$$\mu_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} \mu_N(R_j), \left. \begin{array}{l} \{R_j\}_{j \in J} \text{ famiglia numerabile} \\ \text{di insiemi di } \mathcal{R} \end{array} \right\} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j \right\}.$$

La funzione d'insieme così definita è una misura esterna, e coincide con μ_N su \mathcal{R} . Inoltre, definiti gli insiemi misurabili nella maniera usuale, i rettangoli di \mathbf{R}^N risultano essere misurabili. Ovviamente, dal momento che l'insieme

degli intervalli di \mathbf{R}^N è un sottoinsieme di \mathcal{R} e che μ_N e l_N coincidono sugli intervalli, ogni intervallo è misurabile rispetto a μ_N^* , e $\mu_N^*(I) = l_N(I) = m_N(I)$.

A questo punto ci si può chiedere se la misura μ_N costruita a partire dai rettangoli sia più fine della misura m_N costruita a partire dagli intervalli; ovvero se si riescano a misurare più insiemi partendo da ricoprimenti costituiti da rettangoli piuttosto che da intervalli.

Teorema 5.1.5 *Per ogni E sottoinsieme di \mathbf{R}^N si ha*

$$\mu_N^*(E) = m_N^*(E).$$

Dimostrazione. Detto \mathcal{I} l'insieme degli intervalli di \mathbf{R}^N , si ha ovviamente $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$, e pertanto

$$\mu_N^*(E) \leq m_N^*(E), \quad \forall E \subseteq \mathbf{R}^N.$$

Se $\mu_N^*(E) = +\infty$, dalla disuguaglianza precedente segue che $m_N^*(E) = +\infty$ e quindi si ha la tesi. Supponiamo ora che $\mu_N^*(E) < +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\{R_n\}$ una famiglia al più numerabile di intervalli che ricoprono E e tali che

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu_N(R_n) \leq \mu_N^*(E) + \varepsilon.$$

Ognuno degli R_n ha misura finita, e si scrive come

$$R_n = A_1^n \times \dots \times A_N^n,$$

con A_j^n misurabili in \mathbf{R} e di misura finita. Per ogni j in $\{1, \dots, N\}$ esiste allora (si veda il Teorema 2.2.5) una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_{m_j}^n\}$ la cui unione contiene A_j^n e tale che

$$\sum_{m_j \in \mathbf{N}} l(I_{m_j}^n) \leq m(A_j^n) + \frac{\varepsilon}{2^n (1 + \mu_N(A^n))}.$$

Definiamo ora, per $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbf{N}^N$,

$$I_{\mathbf{m}}^n = I_{m_1}^n \times \dots \times I_{m_N}^n,$$

in modo tale che $\{I_{\mathbf{m}}^n, \mathbf{m} \in \mathbf{N}^N\}$ sia un ricoprimento di R_n . Inoltre,

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{N}^N} l_N(I_{\mathbf{m}}^n) = \prod_{j=1}^N \sum_{m_j \in \mathbf{N}} l(I_{m_j}^n) \leq m(A_1) \cdot \dots \cdot m(A_N) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu_N(R_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

In definitiva, $\{I_{\mathbf{m}}^n, \mathbf{m} \in \mathbf{N}^N, n \in \mathbf{N}\}$ è una famiglia al più numerabile di intervalli aperti che ricopre E , e si ha

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{N}^N} l_N(I_{\mathbf{m}}^n) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu_N(R_n) + \varepsilon \leq \mu_N^*(E) + 2\varepsilon.$$

Pertanto,

$$m_N^*(E) \leq \mu_N^*(E) + 2\varepsilon,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε . ■

A questo punto, essendo μ_N^* e m_N^* numericamente uguali, ne segue che E è misurabile per μ_N^* se e solo se lo è per m_N^* . Pertanto, la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo μ_N^* è la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo m_N^* (ovvero, quella che abbiamo definito come la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue). Cosa abbiamo guadagnato? Una sola cosa: adesso possiamo affermare che i rettangoli di \mathbf{R}^N sono misurabili secondo Lebesgue e che

$$m_N(R) = m_N^*(R) = \mu_N^*(R) = m(A_1) \cdot \dots \cdot m(A_N),$$

ovvero che la misura N -dimensionale del prodotto cartesiano di N insiemi misurabili secondo Lebesgue in \mathbf{R} è il prodotto delle loro misure.

5.2 Il teorema di Fubini-Tonelli

A partire dalla misura N -dimensionale, è possibile definire il concetto di misurabilità per una funzione, e successivamente dare la definizione di integrale. Ancora una volta, tutte le proprietà dimostrate nel caso unidimensionale continuano a valere in dimensione qualsiasi, compresi i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Per semplicità di esposizione, a partire da ora ci limiteremo a considerare \mathbf{R}^2 . Sia allora $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ una funzione sommabile; ovvero, una funzione

misurabile e tale che

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x, y)| dx dy < +\infty.$$

Ci chiediamo ora se — per analogia con quanto accade per l'integrazione secondo Riemann per funzioni continue — l'integrale precedente possa essere “spezzato” in due integrali su \mathbf{R} , ovvero se

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x, y)| dx dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x, y)| dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x, y)| dy \right) dx.$$

A prescindere dall'uguaglianza, affinché la formula precedente sia esatta, devono verificarsi due fatti:

- i) per ogni fissato \bar{y} in \mathbf{R} la funzione $x \mapsto |f(x, \bar{y})|$ deve essere misurabile e sommabile su \mathbf{R} ;
- ii) la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)| dx$ deve essere misurabile e sommabile su \mathbf{R} .

Esempio 5.2.1 Sia P un insieme non misurabile di \mathbf{R} contenuto in $[0, 1]$, e sia $E = P \times \mathbf{Q}$. Allora E (che *non* è un rettangolo) è misurabile in \mathbf{R}^2 . Infatti, $E \subset [0, 1] \times \mathbf{Q}$, che è un rettangolo di misura nulla, e pertanto $m_2^*(E) = 0$, da cui segue (si veda il Teorema 2.3.2), che E è misurabile (e ha misura nulla). Consideriamo ora $f(x, y) = \chi_E(x, y) = \chi_P(x) \chi_{\mathbf{Q}}(y)$. Ovviamente f è misurabile (come funzione caratteristica di un insieme misurabile), e il suo integrale su \mathbf{R}^2 vale zero (essendo f nulla quasi ovunque). Sia ora \bar{y} fissato in \mathbf{R} ; allora $f(x, \bar{y}) = \chi_P(x)$ se \bar{y} è razionale, e zero altrimenti. Pertanto, se \bar{y} è in \mathbf{Q} , $f(x, \bar{y})$ non è misurabile e non ha dunque senso scrivere $\int_{\mathbf{R}} f(x, \bar{y}) dx$. Il che vuol dire che non è (apparentemente) possibile “spezzare” l'integrale di f su tutto \mathbf{R}^2 come due integrali. In realtà, la funzione $f(x, \bar{y})$ è sia misurabile che sommabile su \mathbf{R} per *quasi tutti* gli \bar{y} in \mathbf{R} : tutti, tranne i razionali, che formano un insieme di misura nulla. Pertanto, possiamo definire, per quasi ogni y in \mathbf{R} , la funzione

$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx,$$

che è la funzione identicamente nulla, definire arbitrariamente la stessa funzione per y razionale (dal momento che siamo interessati ad integrare tale

funzione su \mathbf{R} , modificarla — o definirla — su un insieme di misura nulla non modifica il valore dell'integrale), ed ottenere una funzione misurabile (perché quasi ovunque nulla), sommabile, e con integrale zero.

La validità della seconda formula è ancora più evidente, dal momento che, per ogni \bar{x} in \mathbf{R} la funzione $f(\bar{x}, y)$ è la funzione quasi ovunque nulla, e pertanto

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy,$$

è nuovamente la funzione ovunque nulla, il cui integrale è zero.

L'esempio precedente mostra che, nonostante la funzione ottenuta da $f(x, y)$ “congelando” una delle due variabili possa non essere misurabile, i valori di x (o di y) per i quali si ottiene una funzione non misurabile formano un insieme di misura di nulla, e sono quindi trascurabili quando si parla di integrali. Questo fatto accade non solo nell'esempio precedente, ma per ogni funzione misurabile. Per dimostrare questo fatto, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Definizione 5.2.2 Sia \mathcal{R} la famiglia dei rettangoli di \mathbf{R}^2 :

$$\mathcal{R} = \{A \times B, A, B \in \mathcal{M}\}.$$

Definiamo

$$\mathcal{R}_{\cup} = \{E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n, R_n \in \mathcal{R}\},$$

e

$$\mathcal{R}_{\cap} = \{E = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} R_n, R_n \in \mathcal{R}_{\cup}\}.$$

Ovviamente, si ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{\cup} \subset \mathcal{R}_{\cap} \subset \mathcal{M}_2$, e le inclusioni sono strette.

Alcune delle proprietà di \mathcal{R}_{\cup} e \mathcal{R}_{\cap} sono riassunte nel teorema che segue.

Teorema 5.2.3 Si ha

- 1) \mathcal{R}_{\cup} è chiuso rispetto all'unione numerabile e all'intersezione finita;
- 2) \mathcal{R}_{\cap} è chiuso rispetto all'unione numerabile e all'intersezione numerabile;

- 3) per ogni E misurabile in \mathbf{R}^2 con $m_2(E) < +\infty$, e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste R_ε in \mathcal{R}_\cup , con $E \subseteq R_\varepsilon$, e $m_2(R_\varepsilon) \leq m_2(E) + \varepsilon$;
- 4) per ogni E misurabile in \mathbf{R}^2 con $m_2(E) < +\infty$, esiste R in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, con $E \subseteq R$, e $m_2(R) = m_2(E)$;
- 5) se E è in \mathcal{R}_\cup , esiste una famiglia al più numerabile di rettangoli $\{Q_n\}$ a due a due disgiunti e tali che $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Q_n$;
- 6) se E è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ e $m_2(E) < +\infty$, esiste una famiglia al più numerabile di insiemi $\{Q_n\}$ in \mathcal{R}_\cup tali che $m_2(Q_1) < +\infty$, $Q_{n+1} \subseteq Q_n$ per ogni n in \mathbf{N} , e $E = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} Q_n$.

Dimostrazione. Il fatto che \mathcal{R}_\cup sia chiuso rispetto all'unione numerabile discende direttamente dalla definizione di \mathcal{R}_\cup . Se E e F appartengono a \mathcal{R}_\cup , allora

$$E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n, \quad F = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} Q_m,$$

con R_n e Q_m rettangoli. Allora

$$E \cap F = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{m \in \mathbf{N}} R_n \cap Q_m,$$

e quindi $E \cap F$ è in \mathcal{R}_\cup dal momento che $R_n \cap Q_m$ è un rettangolo per ogni n e m . Dalla definizione segue poi in maniera evidente che $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ è chiuso rispetto alle unioni numerabili ed alle intersezioni numerabili.

Sia ora E misurabile e di misura finita. Essendo $m_2(E) = m_2^*(E) = \mu_2^*(E)$, per definizione di μ_2^* , fissato $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia $\{R_n\}$ al più numerabile di rettangoli la cui unione ricopre E e

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} m_2(R_n) \leq m_2(E) + \varepsilon.$$

Se definiamo $R_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$, allora R_ε è in \mathcal{R}_\cup , E è contenuto in R_ε , ed essendo m_2 σ -subadditiva, si ha

$$m_2(R_\varepsilon) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} m_2(R_n) \leq m_2(E) + \varepsilon,$$

che è la tesi di 3).

A partire da 3), sia $\varepsilon = \frac{1}{n}$, e sia R_n in \mathcal{R}_\cup tale che $E \subseteq R_n$ e $m_2(R_n) \leq m_2(E) + \frac{1}{n}$. Definiamo $R = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} R_n$. Allora R è in $\mathcal{R}_{\cup \cap}$, R contiene E e si ha, per ogni n in \mathbf{N} ,

$$m_2(E) \leq m_2(R) \leq m_2(R_n) \leq m_2(E) + \frac{1}{n},$$

da cui segue 4).

Sia ora E in \mathcal{R}_\cup ; allora E è l'unione di una famiglia al più numerabile di rettangoli $\{R_n\}$. Sia $P_1 = R_1$, $P_2 = R_2 \setminus R_1$, $P_n = R_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} R_j)$. Gli insiemi P_j sono evidentemente a due a due disgiunti, e la loro unione è ancora E . Si verifica facilmente che ognuno dei P_j è unione finita di rettangoli a due a due disgiunti: $P_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} Q_i^j$. Pertanto, E è l'unione dei $\{Q_j^n\}$, che sono rettangoli a due a due disgiunti.

Infine, sia E in $\mathcal{R}_{\cup \cap}$, con $m_2(E) < +\infty$. Allora $E = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} R_n$, con R_n in \mathcal{R}_\cup . Definiamo $P_1 = R_1$, $P_2 = R_1 \cap R_2$ e $P_n = \bigcap_{j=1}^n R_j$. Allora i P_j sono ancora in \mathcal{R}_\cup (per 1)), verificano $P_{n+1} \subseteq P_n$, e la loro intersezione è ovviamente E ; l'unica cosa che P_1 potrebbe non verificare è $m_2(P_1) < +\infty$. In questo caso, siccome $m_2(E)$ è finita, per il punto 3) esiste R in \mathcal{R}_\cup tale che $E \subseteq R$ e $m_2(R) \leq m_2(E) + 1$; in particolare, R ha misura finita. Ma allora $\{P_n \cap R\}$ soddisfa tutte le richieste del punto 6). ■

Definizione 5.2.4 Sia E un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 , e sia x in \mathbf{R} . Definiamo la **sezione di E secondo x** l'insieme

$$E_x = \{y \in \mathbf{R} : (x, y) \in E\}.$$

Se E è un insieme di \mathbf{R}^2 , e x è in \mathbf{R} , si ha

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y).$$

Inoltre, se $\{E_n\}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi, allora

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (E_n)_x, \quad \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} E_n \right)_x = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} (E_n)_x.$$

Teorema 5.2.5 Sia x in \mathbf{R} e sia E in $\mathcal{R}_{\cup \cap}$. Allora E_x è misurabile in \mathbf{R} .

Dimostrazione. Sia E in \mathcal{R} . Allora $E = A \times B$, e quindi

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin A, \\ B & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

In entrambi i casi, E_x è misurabile. Se E è in \mathcal{R}_\cup , allora

$$E_x = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (R_n)_x,$$

dove $\{R_n\}$ sono i rettangoli la cui unione è E . Ma allora E_x è misurabile come unione numerabile di insiemi misurabili. Infine, se E è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, allora

$$E_x = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} (R_n)_x,$$

dove $\{R_n\}$ sono gli insiemi di \mathcal{R}_\cup la cui intersezione è E . Ma allora E_x è misurabile come intersezione numerabile di insiemi misurabili. ■

Teorema 5.2.6 *Sia E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ con $m_2(E) < +\infty$, e sia $g(x) = m(E_x)$. Allora g è misurabile su \mathbf{R} e si ha*

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = m_2(E).$$

Dimostrazione. Se E è un rettangolo, allora $E = A \times B$, E_x è B oppure l'insieme vuoto a seconda se x appartiene o meno ad A , e quindi $g(x) = m(B) \chi_A(x)$. Essendo A misurabile, g lo è, e il suo integrale è proprio $m(A) m(B)$ che è $m_2(E)$.

Se E è in \mathcal{R}_\cup , per il Teorema 5.2.2, 5), E è unione al più numerabile di una famiglia $\{R_n\}$ di rettangoli a due a due disgiunti. Definiamo $g_n(x) = m((R_n)_x)$. Allora g_n è misurabile (per quanto appena dimostrato), e si ha

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} g_n(x),$$

da cui segue che g è misurabile. Infine, essendo $g_n \geq 0$ per ogni n , il corollario del Teorema di convergenza monotona, ed il fatto che gli R_n sono disgiunti, implica che

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{\mathbf{R}} g_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbf{N}} m_2(R_n) = m_2(E).$$

Sia ora E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$. Allora, per il Teorema 5.2.2, 6), E è l'intersezione di una famiglia $\{R_n\}$ numerabile di insiemi in \mathcal{R}_{\cup} , con $m_2(R_1) < +\infty$ e $R_{n+1} \subseteq R_n$. Detta $g_n(x) = m((R_n)_x)$, si ha che g_1 è in $L^1(\mathbf{R})$ e che $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq g_1(x)$. Essendo g_1 in $L^1(\mathbf{R})$, g_1 è finita quasi ovunque, e quindi $m((R_1)_x) < +\infty$ per quasi ogni x in \mathbf{R} . Per questi x , dal momento che la successione $\{(R_n)_x\}$ è monotona decrescente e la sua intersezione è E_x , si ha, per il Teorema 2.3.7, ii),

$$g(x) = m(E_x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m((R_n)_x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x).$$

Pertanto, g_n converge a g quasi ovunque e quindi g è misurabile. Essendo $0 \leq g_n \leq g_1$, dal Teorema di Lebesgue segue

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_2(R_n) = m_2(E),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato ancora una volta il Teorema 2.3.7, ii). ■

Finora ci siamo occupati solo degli insiemi di $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, ma per trattare gli insiemi misurabili qualsiasi ci viene in aiuto il punto 4) del Teorema 5.2.2.

Teorema 5.2.7 *Sia E un sottoinsieme misurabile in \mathbf{R}^2 , con $m_2(E) = 0$. Allora E_x è misurabile in \mathbf{R} per quasi ogni x in \mathbf{R} e si ha $m(E_x) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 5.2.2, 4), esiste F in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ contenente E e con $m_2(F) = 0$. Dal teorema precedente segue allora che

$$0 = m_2(F) = \int_{\mathbf{R}} m(F_x) dx.$$

Essendo $m(F_x)$ una funzione misurabile e non negativa, ne segue che $m(F_x) = 0$ per quasi ogni x in \mathbf{R} . Essendo $E \subseteq F$, si ha $E_x \subseteq F_x$ e quindi, per quasi ogni x , E_x è misurabile ed ha misura zero. ■

Teorema 5.2.8 *Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbf{R}^2 , con $m_2(E) < +\infty$. Allora per quasi ogni x in \mathbf{R} l'insieme E_x è misurabile in \mathbf{R} ; la funzione, definita quasi ovunque, $g(x) = m(E_x)$ è misurabile in \mathbf{R} , sommabile su \mathbf{R} e tale che*

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = m_2(E).$$

Dimostrazione. Sempre per il Teorema 5.2.2, 4), esiste F in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ tale che $E \subseteq F$ e $m_2(E) = m_2(F)$. Sia $G = F \setminus E$. Allora G ha misura nulla e quindi, per il teorema precedente, G_x è misurabile per quasi ogni x in \mathbf{R} (con $m(G_x) = 0$). Dal momento che $E_x = F_x \setminus G_x$, E_x è misurabile per quasi ogni x in \mathbf{R} , e $m(E_x) = m(F_x)$ per tali x . Pertanto, $g(x) = m(F_x)$ quasi ovunque; per il Teorema 5.2.6, g è dunque misurabile essendo quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile. Inoltre, sempre per il Teorema 5.2.6,

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = \int_{\mathbf{R}} m(F_x) dx = m_2(F) = m_2(E),$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione 5.2.9 Sia ora E un insieme misurabile di \mathbf{R}^2 , con $m_2(E) < +\infty$, e sia $f(x, y) = \chi_E(x, y)$, cosicché f è sommabile su \mathbf{R}^2 . Dal momento che $\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y)$ il teorema precedente si può così interpretare:

- a) per quasi ogni \bar{x} fissato in \mathbf{R} , la funzione $y \mapsto f(\bar{x}, y) = \chi_{E_{\bar{x}}}(y)$ è misurabile e sommabile su \mathbf{R} (dal momento che il suo integrale vale $m(E_{\bar{x}})$);
- b) la funzione (definita per quasi ogni x in \mathbf{R}) $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy$ è misurabile (dato che $\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy = m(E_x)$) e sommabile su \mathbf{R} ;
- c) si ha

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \right) dx = m_2(E) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

Un discorso analogo si può fare considerando sezioni di E secondo y , ottenendo lo stesso risultato. In altre parole, almeno per le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita è possibile spezzare un integrale doppio come due integrali semplici, integrando prima rispetto ad una qualsiasi delle due variabili, e poi rispetto all'altra.

In realtà, la stessa operazione si può effettuare qualsiasi sia la funzione sommabile su \mathbf{R}^2 ; prima di dimostrare questo fatto, abbiamo bisogno di un ulteriore risultato di approssimazione.

Teorema 5.2.10 *Sia f una funzione non negativa e misurabile su \mathbf{R}^2 . Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$, ognuna nulla fuori da un insieme misurabile di misura finita, tale che φ_n converge a f ovunque in \mathbf{R}^2 .*

Dimostrazione. L'idea di questa dimostrazione è la stessa usata per dimostrare il Teorema 2.4.12. Innanzitutto, siano n in \mathbf{N} e $F_n = [-n, n] \times [-n, n]$; definiamo, per $k = 0, \dots, n2^n - 1$,

$$E_{n,k} = \left\{ x \in F_n : \frac{k}{2^n} \leq f(x, y) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad E_n = \{(x, y) \in F_n : f(x, y) \geq n\}.$$

Gli insiemi E_n e $E_{n,k}$ sono ovviamente misurabili (perché lo è f), e, se $k \leq n2^n - 1$,

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1}, \quad (2.1)$$

l'unione essendo disgiunta. Definiamo

$$\varphi_n(x, y) = n \chi_{E_n}(x, y) + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x, y).$$

Per costruzione, φ_n è una funzione semplice, nulla fuori da F_n (ovvero, da un insieme di misura finita). Inoltre, per ogni (x, y) in $F_n \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq f(x, y) < n\}$ si ha

$$|\varphi_n(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{2^n}. \quad (2.2)$$

Da (2.1) (e dalla definizione di φ_n su E_n) segue anche che, su F_n , si ha $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$; dal momento che φ_n è nulla fuori da F_n , mentre φ_{n+1} è non negativa, si ha $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ su \mathbf{R}^2 .

Sia ora (x, y) in \mathbf{R}^2 tale che $f(x, y) < +\infty$ (quasi ogni (x, y) in \mathbf{R}^2 soddisfa tale proprietà). Allora esiste $n_{(x,y)}$ in \mathbf{N} tale che (x, y) è in $F_n \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq f(x, y) < n\}$ per ogni $n \geq n_{(x,y)}$; per (2.2) si ha allora che $\varphi_n(x, y)$ converge a $f(x, y)$.

Se, invece, $f(x, y) = +\infty$, allora esiste $n_{(x,y)}$ in \mathbf{N} tale che (x, y) è in $F_n \cap E_n$ per ogni $n \geq n_{(x,y)}$. Ma allora $\varphi_n(x, y) = n$ definitivamente, e quindi tende a $+\infty = f(x, y)$. ■

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di spezzamento degli integrali.

Teorema 5.2.11 (Fubini, Tonelli) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile e non negativa. Allora (teorema di Tonelli)

- 1) per quasi ogni \bar{x} in \mathbf{R} la funzione $f_{\bar{x}}$ definita da $f_{\bar{x}}(y) = f(\bar{x}, y)$ è misurabile in \mathbf{R} ;
- 2) per quasi ogni \bar{y} in \mathbf{R} la funzione $f_{\bar{y}}$ definita da $f_{\bar{y}}(x) = f(x, \bar{y})$ è misurabile in \mathbf{R} ;
- 3) la funzione (definita quasi ovunque) $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy$ è misurabile su \mathbf{R} ;
- 4) la funzione (definita quasi ovunque) $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$ è misurabile su \mathbf{R} ;
- 5) si ha

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \right) dx = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Se f è sommabile (di segno qualsiasi), allora (teorema di Fubini) le funzioni definite nei punti 1)–4) sono sommabili.

Dimostrazione. Data la simmetria dell'enunciato rispetto ad x e y , è sufficiente dimostrare 1), 3) e 5).

Iniziamo con l'osservare che il teorema è già provato se $f(x, y)$ è la funzione caratteristica di un insieme misurabile e di misura finita: questo è infatti il contenuto dell'Osservazione 5.2.9, la 1), 3) e 5) essendo rispettivamente la a), b) e c).

Pertanto, per linearità, il teorema è vero per ogni funzione semplice nulla fuori da un insieme di misura finita.

A questo punto utilizziamo il Teorema 5.2.10, e costruiamo una successione $\{\varphi_n\}$ monotona crescente di funzioni semplici convergente ad f ovunque, con φ_n nulla fuori da un insieme di misura finita. Ovviamente, per ogni \bar{x} in \mathbf{R} si ha

$$f_{\bar{x}}(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi_n)_{\bar{x}}(y),$$

Sia ora E_n contenuto in \mathbf{R} tale che $m(E_n) = 0$ e $(\varphi_n)_{\bar{x}}$ è misurabile in \mathbf{R} per ogni x in $\mathbf{R} \setminus E_n$. Detta E l'unione degli E_n , si ha $m(E) = 0$, e $f_{\bar{x}}$ è misurabile

su \mathbf{R} per ogni \bar{x} in $\mathbf{R} \setminus E$, essendo limite puntuale di funzioni misurabili. Per \bar{x} in $\mathbf{R} \setminus E$, inoltre, dal Teorema di convergenza monotona segue che

$$\int_{\mathbf{R}} f(\bar{x}, y) dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_n(\bar{x}, y) dy,$$

cosicché, essendo misurabile per tali \bar{x} la funzione

$$\bar{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}} \varphi_n(\bar{x}, y) dy,$$

si ha che

$$\bar{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(\bar{x}, y) dy,$$

è misurabile.

Dal momento che

$$\bar{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(\bar{x}, y) dy,$$

è limite della successione crescente

$$\bar{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}} \varphi_n(\bar{x}, y) dy,$$

una seconda applicazione del Teorema della convergenza monotona, ed il fatto che il teorema è vero per funzioni semplici, implica che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \right) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x, y) dy \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} \varphi_n(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato ancora una volta il Teorema di convergenza monotona. Pertanto, 5) è dimostrata.

Supponiamo ora che f sia sommabile; per linearità dell'integrale, è sufficiente dimostrare 1), 3) e 5) per $f^+(x, y)$ e $f^-(x, y)$, ovvero dimostrarle per una funzione sommabile non negativa. Essendo una tale funzione misurabile, otteniamo 1), 3) e 5); inoltre, essendo finito l'integrale su \mathbf{R} di

$$\bar{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(\bar{x}, y) dy,$$

ne segue che tale funzione è sommabile, cosicché la funzione definita in 3) è sommabile; essendo sommabile, è finita quasi ovunque, e quindi

$$\bar{x} \mapsto f(\bar{x}, y),$$

è sommabile per quasi ogni \bar{x} . ■

Osservazione 5.2.12 Lo “spazio ambiente” delle dimostrazioni svolte finora è stato \mathbf{R}^2 , ma il Teorema di Fubini-Tonelli è valido anche in \mathbf{R}^N , che possiamo “spezzare” come $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{N-k}$. Analogamente, possiamo “spezzare” gli integrali come vogliamo, ed effettuarli nell’ordine che vogliamo.

Osservazione 5.2.13 Il teorema precedente è un buon “test” di sommabilità, nel senso che per dimostrare che una funzione misurabile è sommabile su \mathbf{R}^2 la si può integrare prima rispetto ad una variabile, poi rispetto all’altra; se il risultato è finito, la funzione di partenza è sommabile, altrimenti no.

Esempio 5.2.14 Sia f in $L^p(\mathbf{R})$. Allora è finito l’integrale su \mathbf{R} di $|f(x)|^p$. Pertanto, per il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{[0, |f(x)|]} py^{p-1} dy \right) dx \\ &= p \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} y^{p-1} \chi_{[0, |f(x)|]}(y) dy \right) dx \\ &= p \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \chi_{\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq |f(x)|\}}(x, y) dx \right) y^{p-1} dy \\ &= p \int_{\mathbf{R}} m(\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| \geq y\}) \chi_{[0, +\infty)}(y) y^{p-1} dy \\ &= p \int_{[0, +\infty)} y^{p-1} m(\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| \geq y\}) dy, \end{aligned}$$

che dà una formula per il calcolo dell’integrale di una funzione di $L^p(\mathbf{R})$ in termini della misura dei sopralivelli. In maniera analoga si dimostra che, se E è un insieme misurabile e f è in $L^p(E)$, allora

$$\int_E |f(x)|^p dx = p \int_{[0, +\infty)} m(\{x \in E : |f(x)| \geq y\}) y^{p-1} dy.$$

In modo simile, si ha, per ogni $k \geq 0$,

$$\int_{\{x \in E : |f(x)| \geq k\}} |f(x)|^p dx = p \int_{[k, +\infty)} m(\{x \in E : |f(x)| \geq y\}) y^{p-1} dy.$$

Ad esempio, se $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,+\infty)}(x)$, dal momento che

$$m(\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| \geq y\}) = \begin{cases} \frac{1}{y} - 1 & \text{se } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ha

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx = p \int_{[0,1]} y^{p-1} \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = \frac{1}{p-1}.$$

Inoltre, se $m(E) < +\infty$, e se f è tale che esiste una costante $C > 0$ tale che $m(\{x \in E : |f(x)| > y\}) \leq \frac{C}{y^q}$ (ovvero, f appartiene allo spazio di Marcinkiewicz $M^q(E)$), allora f è in $L^p(E)$ per ogni $p < q$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^p dx &= \int_{\{x \in E : |f(x)| < 1\}} |f(x)|^p dx + \int_{\{x \in E : |f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^p dx \\ &\leq m(E) + p \int_{[1,+\infty)} m(\{x \in E : |f(x)| \geq y\}) y^{p-1} dy \\ &\leq m(E) + pC \int_{[1,+\infty)} \frac{1}{y^{q-p+1}} dy < +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $L^p(E)$ è contenuto in $M^p(E)$ (come si vede utilizzando la disuguaglianza (2.25) del Capitolo 3), se $m(E) < +\infty$, $M^{p+\varepsilon}(E) \subset L^p(E) \subset M^p(E)$, con inclusioni strette.