Capitolo 4

Gli spazi L^p

4.1 $L^1(E)$

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto l'integrale secondo Lebesgue per funzione misurabili su un insieme misurabile E. In particolare, e per dimostrare il teorema di Lebesgue, ci siamo ristretti alla classe delle funzioni sommabili — cioè le funzioni con integrale del modulo finito. Tale insieme può essere reso uno spazio metrico nel modo seguente.

Definizione 4.1.1 Sia E un insieme misurabile. Se f e g sono misurabili su E, definiamo $f \rho g$ se e solo se $f = g$ q.o.. È facile vedere che ρ è una relazione di equivalenza. Definiamo allora

$$L^1(E) = \frac{\left\{ f : E \to \bar{\mathbf{R}} \text{ misurabili: } \int_E |f(x)|\,dx < +\infty \right\}}{\rho},$$

ovvero lo spazio delle (classi di equivalenza quasi ovunque di) funzioni sommabili su E. Si indicherà sempre con f l'elemento $[f]$ di $L^1(E)$ (ovvero, lavoreremo con le funzioni ma tenendo sempre a mente che si tratta in realtà di classi di equivalenza).

Su $L^1(E)$ definiamo la seguente distanza:

$$d_1(f, g) = \int_E |f(x) - g(x)|\,dx\,.$$

Osserviamo che d_1 è ben definita: non dipende dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, dato che se $h \in [f]$ e $k \in [g]$, allora $|h-k| = |f-g|$

quasi ovunque e dunque gli integrali sono uguali; inoltre, $d_1(f,g)$ è un numero reale per ogni f e g in $L^1(E)$, dato che $|f(x)-g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ e l'integrale è monotono.

Si verifica facilmente che $d_1(f,g) \ge 0$ e che $d_1(f,g) = d_1(g,f)$; inoltre

$$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|\,,$$

e, integrando su E, si ha la disuguaglianza triangolare. Rimane da dimostrare che se $d_1(f,g)=0$, allora $[f]=[g]$, ovvero che $f=g$ quasi ovunque. In altre parole, se h è una funzione ovunque non negativa tale che l'integrale di h su E vale zero, allora deve essere $h=0$ quasi ovunque. Per dimostrare questo fatto, sia $a>0$ e definiamo $E_a(h)=\{x\in E : h(x)>a\}$. Si ha allora

$$0=\int_E h(x)\,dx \ge \int_E h(x)\,\chi_{E_a(h)}(x)\,dx \ge a\int_E \chi_{E_a(h)}(x)\,dx = a\,m(E_a(h))\,,$$

e quindi $m(E_a(h))=0$ per ogni $a>0$, da cui segue (essendo $E_0(h)$ l'unione di $E_{1/n}(h)$ al variare di n in $\mathbf{N}$) che $E_0(h)$ ha misura nulla, e quindi $h=0$ quasi ovunque.

In definitiva, $(L^1(E),d_1)$ è uno spazio metrico. Se $E=[a,b]$, essendo ogni funzione continua su $[a,b]$ misurabile e limitata (quindi integrabile, e con integrale finito), si ha che $C^0([a,b],\mathbf{R})$ è un sottoinsieme proprio di $L^1([a,b])$. Siamo dunque partiti dallo spazio (non completo) $(C^0([a,b],\mathbf{R}),d_1)$, abbiamo introdotto la misura secondo Lebesgue, le funzioni misurabili, le funzioni integrabili ed infine le funzioni sommabili (che sono un sottoinsieme proprio delle funzioni integrabili); su quest'ultimo insieme (opportunamente quozientato) abbiamo mostrato come d_1 sia una distanza. Ci chiediamo ora se il nostro lavoro sia “finito”; ovvero se $(L^1([a,b]),d_1)$ sia completo, e se le funzioni continue siano dense in $(L^1([a,b]),d_1)$. Se così fosse, avremmo dimostrato che $(L^1([a,b]),d_1)$ è il completamento di $(C^0([a,b],\mathbf{R}),d_1)$. Fortunatamente, così è...

Definizione 4.1.2 Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni in $L^1(E)$. Diciamo che la serie

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,,$$

converge a

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

in $L^1(E)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} d_1(S_n, S) = \lim_{n\to+\infty} \int_E |S_n(x) - S(x)|\, dx = 0\,.$$

Diciamo che la serie S_n **converge totalmente** in $L^1(E)$ se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\, dx\right) < +\infty\,.$$

Teorema 4.1.3 *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni in $L^1(E)$ tale che la serie*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,,$$

converge totalmente in $L^1(E)$. Allora esiste una funzione S in $L^1(E)$ tale che la serie S_n converge a S in $L^1(E)$.

Dimostrazione. Sia n in $\mathbf{N}$ e definiamo

$$M = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\, dx\right)\,, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\,.$$

Allora $\{g_n\}$ è una successione di funzioni non negative in $L^1(E)$ (come somma di funzioni in $L^1(E)$) e tale che

$$0 \le \int_E g_n(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_E |f_k(x)|\, dx\right) \le M\,.$$

Inoltre, per ogni x in E, $\{g_n(x)\}$ è una successione monotona a valori in $[0, +\infty]$. È pertanto ben definita la funzione

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,,$$

e si ha $g : E \to [0, +\infty]$; inoltre, g è non negativa e misurabile. Per il lemma di Fatou (o per il teorema di convergenza monotona),

$$0 \le \int_E g(x)\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n(x)\, dx \le M\,,$$

e quindi g appartiene a $L^1(E)$. Essendo in $L^1(E)$, g è finita quasi ovunque, ovvero $m(G_{+\infty}(g)) = 0$. Sia ora x in $E \backslash G_{+\infty}(g)$. Per tale x la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,,$$

converge assolutamente, e quindi semplicemente. Possiamo allora definire, per x in $E \backslash G_{+\infty}(g)$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,.$$

Se x appartiene a $G_{+\infty}(g)$, definiamo $S(x) = 0$. Così facendo, abbiamo $|S(x)| \leq g(x)$ q.o. (anzi, ovunque), e pertanto S appartiene a $L^1(E)$. Dimostriamo ora che la serie S_n converge in $L^1(E)$ a S. Innanzitutto, S_n converge quasi ovunque a S (non vi converge al più in $G_{+\infty}(g)$ che ha misura nulla). Inoltre, essendo anche $|S_n(x)| \leq g(x)$ (come si verifica facilmente),

$$|S_n(x) - S(x)| \leq 2\,g(x)\,,$$

con g in $L^1(E)$. Per il teorema di Lebesgue, l'integrale di $|S_n(x) - S(x)|$ tende a zero, e quindi $d_1(S_n, S)$ tende a zero. ∎

Osservazione 4.1.4 Un modo alternativo per concludere la dimostrazione precedente è il seguente:

$$\begin{aligned}
\int_E |S_n(x) - S(x)|\,dx &= \int_E \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| dx \\
&\leq \int_E \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \right) dx \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\,dx \right)
\end{aligned}$$

(applicando il teorema di convergenza monotona nell'ultimo passaggio), e l'ultimo termine è infinitesimo per ipotesi (è la serie resto di una serie convergente).

Lemma 4.1.5 *Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (X, d). Se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a x_0 in (X, d), allora tutta la successione x_n converge a x_0 in (X, d).*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, e sia n_ε tale che $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ per ogni n e m maggiori di n_ε. Sia poi k_ε tale che $n_k \geq n_\varepsilon$ e $d(x_{n_k}, x_0) \leq \varepsilon/2$ per ogni $k \geq k_\varepsilon$. Allora, per ogni $n \geq n_\varepsilon$,

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_{k_\varepsilon}}) + d(x_{n_{k_\varepsilon}}, x_0) \leq \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ∎

Teorema 4.1.6 *Lo spazio metrico $(L^1(E), d_1)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L^1(E), d_1)$; ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$d_1(f_n, f_m) = \int_E |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni k in $\mathbf{N}$, esiste n_k in $\mathbf{N}$ tale che

$$d_1(f_n, f_m) = \int_E |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \frac{1}{2^k}\,, \qquad \forall n, m \geq n_k\,.$$

Scegliamo gli n_k in modo tale che $n_{k+1} > n_k$, cosicché $\{f_{n_k}\}$ è una sottosuccessione estratta da $\{f_n\}$. Definiamo

$$g_1 = f_{n_1}\,, \qquad g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\,,$$

in modo tale che si abbia

$$f_{n_k}(x) = \sum_{h=1}^{k} g_h(x)\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\int_E |g_h(x)|\,dx\right) &= \int_E |g_1(x)|\,dx + \sum_{h=2}^{+\infty}\left(\int_E |f_{n_h}(x) - f_{n_{h-1}}(x)|\,dx\right) \\ &\leq \int_E |g_1(x)|\,dx + \sum_{h=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{h-1}} \\ &= \int_E |g_1(x)|\,dx + 1 < +\infty\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la serie $S_k(x) = \sum_{h=1}^{k} g_h(x)$ converge totalmente in $L^1(E)$. Per il teorema precedente, esiste f in $L^1(E)$ tale che S_k converge a f. Essendo $S_k = f_{n_k}$, abbiamo estratto da f_n una sottosuccessione convergente in $L^1(E)$ ad f. La tesi segue allora dal Lemma 4.1.5. ∎

Teorema 4.1.7 *Sia f una funzione in $L^1([a,b])$. Allora esiste una successione di funzioni f_n in $C^0([a,b],\mathbf{R})$ tale che f_n converge a f in $L^1([a,b])$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è in due passi.
Passo 1: Sia f in $L^1([a,b])$, f limitata.

Sia $\varepsilon > 0$ e sia f uno qualsiasi dei rappresentanti nella classe $[f]$; essendo f misurabile, applichiamo il Teorema 2.4.12: esiste C_ε contenuto in $[a,b]$, chiuso, tale che $m([a,b]\backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$ e tale che la restrizione di f a C_ε è continua. Non è restrittivo supporre che a e b appartengano a C_ε; infatti, se a o b non sono in C_ε, è sempre possibile aggiungerveli definendo $f(a) = 0$ (o $f(b) = 0$), senza modificare né la misura, né la chiusura di C_ε, né la continuità della restrizione di f a C_ε (se a o b non sono in C_ε, allora nessuna successione a valori in C_ε può convergere ad a (o a b)). Sia $E_\varepsilon = [a,b]\backslash C_\varepsilon$; allora E_ε è aperto (nella topologia indotta su $[a,b]$ dalla topologia di $\mathbf{R}$). Pertanto, esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti, a due a due disgiunti, tali che

$$E_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)\,.$$

Siccome gli intervalli sono a due a due disgiunti, i punti a_n e b_n non appartengono a E_ε, e sono quindi in C_ε, il che vuol dire che sono definiti sia $f(a_n)$ che $f(b_n)$. Definiamo allora la funzione g_ε nel seguente modo:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ in } C_\varepsilon, \\ \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}(x-a_n) + f(a_n) & \text{se } x \text{ in } (a_n,b_n) \subseteq E_\varepsilon. \end{cases}$$

In altre parole, stiamo definendo g_ε su (a_n, b_n) in maniera lineare. La funzione g_ε così ottenuta è continua su $[a,b]$. Infatti, g_ε è continua su C_ε, ed è continua (essendo lineare) in (a_n, b_n). Rimane da verificare che è continua nei punti a_n e b_n (per ogni n in $\mathbf{N}$). Se $\{x_k\}$ è una successione contenuta in C_ε e convergente ad a_n, allora $g_\varepsilon(x_k) = f(x_k)$ converge a $f(a_n)$ (perché f è continua su C_ε); se, invece, $\{x_k\}$ è una successione contenuta in E_ε e convergente a a_n, allora definitivamente x_k è in (a_n, b_n) e quindi (per definizione di g_ε su (a_n, b_n)), $g(x_k)$ converge a $f(a_n)$. Analogo ragionamento dimostra che g_ε è continua in b_n.

Dato $\varepsilon > 0$ abbiamo così definito una funzione g_ε continua su $[a,b]$ e tale che $m(\{x \in [a,b] : g_\varepsilon(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. Inoltre, per costruzione, se M è tale che $|f(x)| \leq M$ in $[a,b]$, si ha $|g_\varepsilon(x)| \leq M$ in $[a,b]$ (su (a_n, b_n) la funzione $g_\varepsilon(x)$ è compresa tra $f(a_n)$ e $f(b_n)$).

Sia allora $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e sia $f_n = g_{1/n}$. La successione $\{f_n\}$ è formata da funzioni continue, e si ha, se M è tale che $|f(x)| \leq M$ in $[a,b]$,

$$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_{E_{\frac{1}{n}}} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq 2M\, m(E_{\frac{1}{n}}) < \frac{2M}{n}\,,$$

da cui la tesi, al limite per n tendente ad infinito.

Passo 2: Sia f in $L^1([a,b])$.

Sia n in $\mathbf{N}$, e definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n, \\ f(x) & \text{se } -n \leq f(x) \leq n, \\ -n & \text{se } f(x) < -n. \end{cases}$$

Come si verifica facilmente, la successione $\{|f_n - f|\}$ converge quasi ovunque in $[a,b]$ a 0 (gli unici punti su cui non converge sono quelli per i quali $f(x) = \pm\infty$, che hanno misura nulla per il Teorema 3.2.25). Inoltre, essendo $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq 2|f(x)|$, e $|f(x)|$ è sommabile. Per il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste pertanto n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Per definizione, f_{n_ε} è limitata (da n_ε); per il Passo 1, esiste g_{n_ε} continua su $[a,b]$ e tale che

$$\int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si ha allora

$$\int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|\, dx \leq \int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|\, dx + \int_{[a,b]} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ∎

Se definiamo $i : C^0([a,b],\mathbf{R}) \to L^1([a,b])$ come l'identità, e consideriamo nei due spazi la distanza d_1, come conseguenza dei due teoremi precedenti si ha che i è un'isometria, ed inoltre che la chiusura di $i(C^0([a,b],\mathbf{R}))$ è $L^1([a,b])$; per l'unicità del completamento, si ha che $(L^1([a,b]),d_1)$ è il completamento di $C^0([a,b],\mathbf{R}),d_1)$; in altre parole (andando a leggere la dimostrazione del teorema di completamento), se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue che è di Cauchy in d_1, allora f_n converge ad una funzione f in $L^1([a,b])$; viceversa, ogni funzione in $L^1([a,b])$ è il limite in d_1 di una successione (di Cauchy in d_1) di funzioni continue. Osserviamo che, sempre nella dimostrazione del teorema di completamento, lo spazio Y è definito come lo spazio delle successioni di Cauchy in d_1, modulo la relazione di equivalenza che identifica due successioni di Cauchy $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ nel caso in cui $d_1(f_n,g_n)$ tenda a zero. Sappiamo ora che se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sono due successioni di Cauchy in d_1 funzioni continue, allora f_n converge a f in d_1 e g_n converge a g in d_1 (con f e g in $L^1([a,b])$). È facile vedere che dall'ipotesi $d_1(f_n,g_n)$ tendente a zero segue

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|\, dx = 0\,,$$

da cui $f = g$ quasi ovunque; pertanto, f e g sono nella stessa classe di equivalenza in $L^1([a,b])$. In altre parole, l'identificazione di due funzioni uguali quasi ovunque è fatta nello stesso spirito della dimostrazione del teorema di completamento, ed è quindi necessaria per ottenere uno spazio metrico completo.

4.2 $L^p(E)$ e $L^\infty(E)$

Sia $1 < p < +\infty$ un numero reale. Detta ρ la relazione di equivalenza introdotta nella sezione precedente, definiamo

$$L^p(E) = \frac{\left\{f : E \to \bar{\mathbf{R}} \text{ misurabili: } \int_E |f(x)|^p\, dx < +\infty\right\}}{\rho}\,.$$

Anche $L^p(E)$ può essere reso uno spazio metrico con la distanza

$$d_p(f,g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Come già per d_1, si vede che $d_p(f,g)$ non dipende dai rappresentanti scelti in $[f]$ e $[g]$, che $d_p(f,g) \geq 0$, che $d_p(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$ q.o. (e quindi se e solo se $[f] = [g]$), e che $d_p(f,g) = d_p(g,f)$. La disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza di Hölder che, valida per funzioni continue, si dimostra allo stesso modo per funzioni in $L^p(E)$ (è sufficiente ricordare che una disuguaglianza verificata quasi ovunque si conserva integrando).

Come già $L^1(E)$, anche $L^p(E)$ è uno spazio completo: la dimostrazione è identica a quella del Teorema 4.1.6, usando il concetto di convergenza totale in $L^p(E)$ per una serie di funzioni, che in questo caso diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \,.$$

Se $E = [a,b]$, $L^p(E)$ è il completamento di $(C^0([a,b], \mathbf{R}), d_p)$ (anche in questo caso la dimostrazione è identica a quella del Teorema 4.1.7).

Leggermente differente è la definizione nel caso in cui $p = +\infty$.

Definizione 4.2.1 Sia f una funzione misurabile definita su un insieme misurabile E. Definiamo l'estremo superiore essenziale di $|f|$ come

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| &= \inf \{M \geq 0 : m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0\} \\ &= \inf \{M \geq 0 : \ |f(x)| \leq M \text{ q.o. in } E\} \,. \end{aligned}$$

Ricordiamo che, per definizione, $\inf \emptyset = +\infty$. Dalla definizione discende direttamente il seguente fatto:

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \,, \qquad \text{q.o. in } E.$$

Se, ad esempio, f è la funzione di Dirichlet, allora $\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| = 0$ (dal momento che $f = 1$ sui razionali, che hanno misura nulla); se $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0,1)$, allora $\operatorname{ess\,sup}_{(0,1)} |f(x)| = +\infty$, dal momento che non esiste alcuna costante positiva M tale che $|f(x)| \leq M$ quasi ovunque. Se f è una funzione continua su $[a,b]$, si verifica facilmente che $\operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} |f(x)| = \max_{[a,b]} \, |f(x)|$.

Definiamo allora

$$L^\infty(E) = \frac{\left\{ f : E \to \bar{\mathbf{R}} \text{ misurabili: } \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| < +\infty \right\}}{\rho} \,.$$

Anche $L^\infty(E)$ si può rendere uno spazio metrico, introducendo

$$d_\infty(f,g) = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x) - g(x)|\,.$$

Che d_∞ sia una distanza lo si vede facilmente: è ben definita, non negativa, nulla se e solo se $[f] = [g]$, ed è simmetrica. Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, si ha, per quasi ogni x in E,

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)\,,$$

da cui $d_\infty(f,g) \le d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$.

Chiaramente, se $E = [a,b]$, $C^0([a,b],\mathbf{R}) \subset L^\infty([a,b])$, e l'immersione i è un'isometria (rispetto alle due distanze d_∞ su $C^0([a,b],\mathbf{R})$ e d_∞ su $L^\infty([a,b])$). Però, la chiusura di $i(C^0([a,b],\mathbf{R}))$ non è densa in $L^\infty([a,b])$, per il semplice fatto che $(C^0([a,b],\mathbf{R}),d_\infty)$ è **già** un sottospazio completo di $(L^\infty([a,b]),d_\infty)$ e quindi è chiuso. In altre parole, $(L^\infty([a,b]),d_\infty)$ non è il completamento di $(C^0([a,b],\mathbf{R}),d_\infty)$. Comunque, è uno spazio completo.

Teorema 4.2.2 *Lo spazio $(L^\infty(E),d_\infty)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L^\infty(E),d_\infty)$; ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$d(f_n,f_m) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\,, \qquad \forall n,m \ge n_\varepsilon\,.$$

Sia, per n e m in $\mathbf{N}$,

$$E_{n,m} = \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| > \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)|\}\,.$$

Per definizione di estremo superiore essenziale, $E_{n,m}$ ha misura nulla. Definiamo

$$E_0 = \bigcup_{n,m=1}^{+\infty} E_{n,m}\,,$$

cosicché $m(E_0) = 0$. Sia x in $E \backslash E_0$. Allora x non appartiene a nessuno degli $E_{n,m}$ e quindi, se n e m sono maggiori di n_ε,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

Pertanto, $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbf{R}$, e quindi converge ad un numero reale, che definiamo $f(x)$. In definitiva, se $\{f_n\}$ è di Cauchy in $(L^\infty(E), d_\infty)$, allora f_n converge quasi ovunque in E ad una funzione f. Se x è in $E \backslash E_0$, passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza (2.1), si trova

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi, siccome E_0 ha misura nulla,

$$d_\infty(f_n, f) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, f è in $L^\infty(E)$, perché

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_E |f_{n_\varepsilon}(x)|\,,$$

e f_n converge ad f in $(L^\infty(E), d_\infty)$. ■

Se E ha misura finita, gli spazi $L^p(E)$ sono “inscatolati”.

Teorema 4.2.3 *Sia E un insieme misurabile con $m(E) < +\infty$. Siano $1 \leq p < q \leq +\infty$. Allora*

$$L^q(E) \subset L^p(E)\,.$$

Dimostrazione. Sia f in $L^q(E)$. Se $q < +\infty$, ricordando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p\,dx &= \int_E |f(x)|^p\,1\,dx \\
&\leq \left(\int_E |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_E 1^{\frac{q}{q-p}}\,dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= \left(\int_E |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} [m(E)]^{\frac{q-p}{q}}\,.
\end{aligned}$$

Se $q = +\infty$, essendo $|f(x)|^p \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|^p$ quasi ovunque, si ha

$$\int_E |f(x)|^p\,dx \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|^p\,m(E) = [\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|]^p\,m(E)\,.$$

■

Osservazione 4.2.4 In genere, l'inclusione è stretta, nel senso che esistono funzioni in $L^p(E)$ che non appartengono a $L^q(E)$. Ad esempio, se $E = (0,1/2)$, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}\,(-\ln(x))^2}\,,$$

è in $L^p((0,1/2))$, ma non appartiene a $L^q((0,1/2))$ per ogni $q > p$, mentre la funzione $\ln(x)$ è in tutti gli $L^p((0,1))$ ma non in $L^\infty((0,1))$.

Osservazione 4.2.5 Sia E un insieme misurabile di misura finita, e sia f una funzione in $L^\infty(E)$; allora

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| = \lim_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Infatti, per ogni $p > 1$ si ha

$$\left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|\,,$$

e quindi

$$\limsup_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|\,.$$

D'altra parte, sia $\varepsilon > 0$ e sia $M = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|$. Allora (per definizione di estremo superiore essenziale),

$$m(\{x \in E : |f(x)| \ge M - \varepsilon\}) > 0\,.$$

Pertanto, per (2.25),

$$\int_E |f(x)|^p\,dx \ge (M-\varepsilon)^p\, m(\{x \in E : |f(x)| \ge M - \varepsilon\})\,,$$

da cui (ricordando che $\sqrt[p]{a}$ tende a 1 per ogni $a > 0$)

$$M - \varepsilon \le \liminf_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,,$$

ovvero, essendo ε arbitrario,

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \le \liminf_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,,$$

da cui il risultato.

4.3 Convergenza in $L^p(E)$

Sia $1 \leq p < +\infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione in $L^p(E)$ convergente a f in $L^p(E)$. Cosa possiamo dire della convergenza puntuale di f_n a f? Il seguente esempio mostra che f_n può convergere a zero in $L^p(E)$, senza che f_n converga puntualmente.

Esempio 4.3.1 Sia $E = [0,1)$; sia $n \in \mathbf{N}$, e scriviamo $n = 2^k + m$, con k in $\mathbf{N}$ e m tra 0 e $2^k - 1$ (si noti che tale scrittura è unica); ad esempio, $1 = 2^0 + 0$, $2 = 2^1 + 0$, $3 = 2^1 + 1$, $26 = 2^4 + 10$, eccetera. Definiamo

$$E_n = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right) .$$

Ad esempio, $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [0, \frac{1}{2})$, $E_3 = [\frac{1}{2}, 1)$ e $E_{26} = [\frac{10}{16}, \frac{11}{16})$. Definiamo poi $f_n = \chi_{E_n}$. Essendo $m(E_n) = \frac{1}{2^k}$, con $k = [\log_2(n)]$ ($[\cdot]$ è la parte intera), si ha

$$\int_E |f_n(x)|^p \, dx = \int_{E_n} 1^p \, dx = m(E_n) = \frac{1}{2^{[\log_2(n)]}} ,$$

e quindi f_n tende a zero in $L^p(E)$, qualsiasi sia $p \geq 1$. D'altra parte, f_n non converge puntualmente a zero perché, per ogni x in $[0,1)$, non converge. Ad esempio, se $x = 0$, $f_n(x)$ vale 1 quando $n = 2^k$ per qualche $k \geq 0$ intero, mentre vale 0 per tutti gli altri n. Esiste allora una sottosuccessione ($n = 2^k$) lungo la quale $f_n(0)$ tende a 1, ed una sottosuccessione ($n \neq 2^k$) lungo la quale $f_n(0)$ tende a zero; pertanto $f_n(0)$ non ammette limite.

Si noti però che f_n converge a zero in misura (dato che $m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| \geq \lambda\}) = m(E_n)$ se $0 < \lambda \leq 1$), e la sottosuccessione f_{2^k} converge a zero quasi ovunque (tende a zero ovunque tranne per $x = 0$, dove tende a 1).

Il precedente esempio giustifica il seguente teorema.

Teorema 4.3.2 *Sia $1 \leq p < +\infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni tendente a f in $L^p(E)$. Allora f_n converge ad f in misura, ed esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che f_n converge a f quasi ovunque.*

Dimostrazione. Se f_n converge a f in $L^p(E)$ si ha, per definizione,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0 .$$

Ricordando (2.25), se $\lambda > 0$ si ha

$$0 \leq m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \,,$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) = 0 \,,$$

ovvero, f_n converge a f in misura. La tesi segue allora dal Teorema 3.2.32.

■

Dal momento che la successione dell'Esempio 4.3.1 non tende a zero in $L^\infty(E)$ (ed infatti, l'estremo superiore essenziale di f_n è 1 per ogni n in $\mathbf{N}$), nel caso $p = +\infty$, il risultato è più forte.

Teorema 4.3.3 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $L^\infty(E)$. Allora f_n converge a f in $L^\infty(E)$ se e solo se esiste un insieme E_0 di misura nulla tale che f_n converge uniformemente a f in $E \setminus E_0$.*

Dimostrazione. Se f_n converge uniformemente ad f su $E \setminus E_0$, con $m(E_0) = 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{E \setminus E_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Pertanto, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ su $E \setminus E_0$, ovvero $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ q.o. in E. Pertanto (per definizione di estremo superiore essenziale),

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,,$$

e quindi f_n converge ad f in $L^\infty(E)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Pertanto, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ esiste un insieme E_n contenuto in E, con $m(E_n) = 0$, tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,, \qquad \forall x \in E \setminus E_n \,.$$

Sia allora E_0 l'unione degli E_n per $n \geq n_\varepsilon$. Ovviamente $m(E_0) = 0$, e si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,, \qquad \forall x \in E \setminus E_0 \,,\ \forall n \geq n_\varepsilon \,,$$

ovvero,

$$\sup_{E\setminus E_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi la tesi. ∎

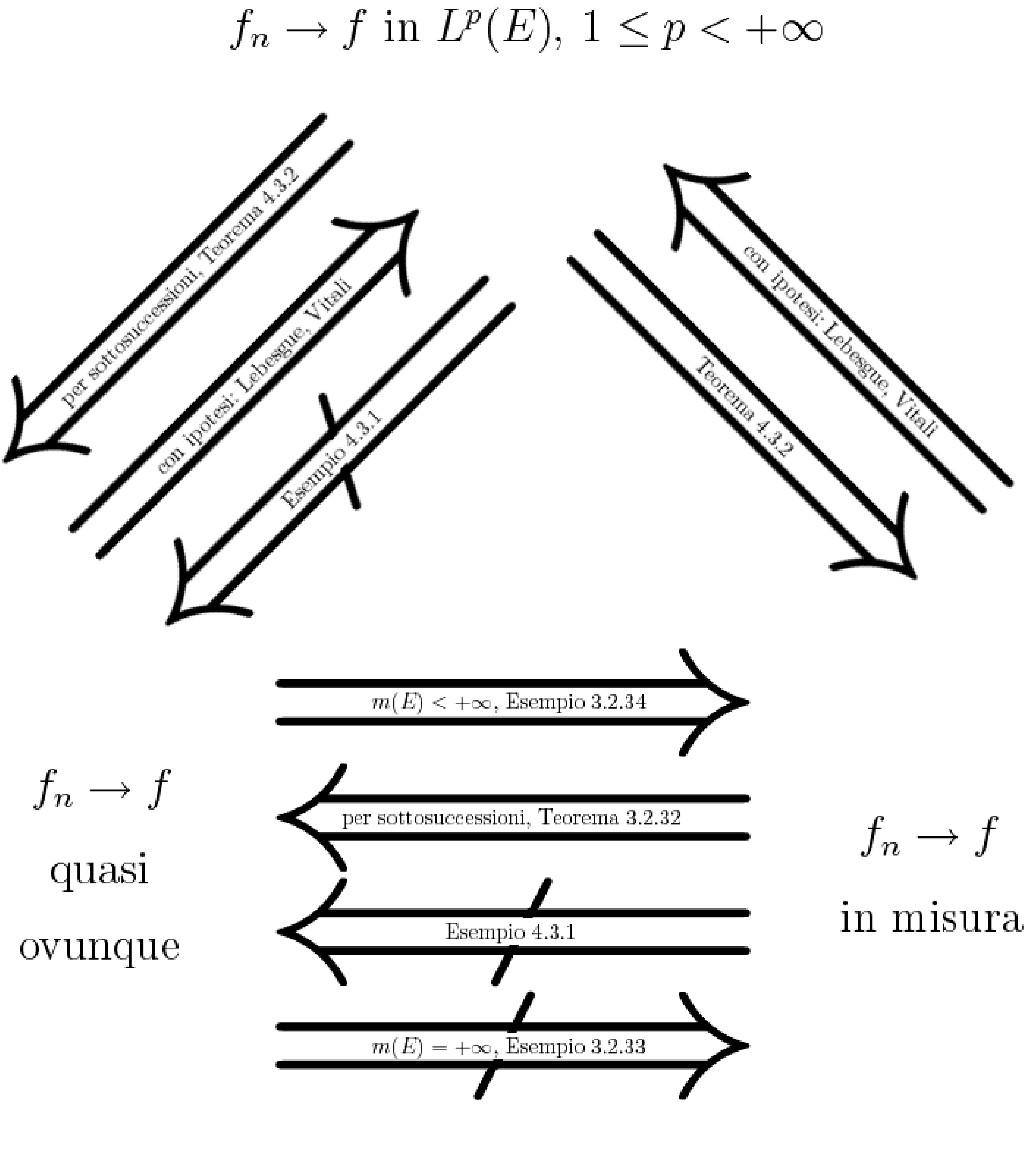
Come conseguenza del teorema precedente, se f_n converge ad f in $L^\infty(E)$, allora f_n converge ad f quasi ovunque.

Infine, se E ha misura finita (e quindi gli spazi $L^p(E)$ sono "inscatolati"), se f_n converge ad f in $L^p(E)$, allora f_n converge ad f in $L^q(E)$ per ogni $q < p$. Infatti, per la disuguaglianza di Hölder, e se $p < +\infty$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^q\,dx \leq m(E)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\,.$$

Se $p = +\infty$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^q\,dx \leq m(E)\,\left(\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)|\right)^q\,.$$


$f_n \to f$ in $L^p(E)$, $1 \leq p < +\infty$
per sottosuccessioni, Teorema 4.3.2
con ipotesi: Lebesgue, Vitali
Esempio 4.3.1
con ipotesi: Lebesgue, Vitali
Teorema 4.3.2
$f_n \to f$ quasi ovunque
$m(E) < +\infty$, Esempio 3.2.34
per sottosuccessioni, Teorema 3.2.32
Esempio 4.3.1
$m(E) = +\infty$, Esempio 3.2.33
$f_n \to f$ in misura

4.4 Separabilità

Uno spazio metrico (X, d) si dice **separabile** se esiste un insieme $\mathcal{E}$ contenuto in X numerabile e denso. Un esempio di spazio metrico separabile è $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, dato che $\mathcal{E} = \mathbf{Q}$ è denso e numerabile. Un altro esempio di spazio separabile è $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$, dal momento che l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è denso (questo è il Teorema — non proprio di dimostrazione immediata! — di Stone-Weierstrass) e numerabile (dimostrarlo per esercizio).

Se $1 \le p < +\infty$, lo spazio $L^p(E)$ è separabile.

Teorema 4.4.1 *Sia $1 \le p < +\infty$. Lo spazio $L^p(\mathbf{R})$ è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle funzioni a gradino della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \chi_{[a_i,b_i)}(x)\,, \tag{4.1}$$

con q_i, a_i e b_i razionali, e l'unione degli intervalli (disgiunti) $[a_i, b_i)$ contenuta in $[-n, n]$ per qualche n in $\mathbf{N}$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{E}$ è denso in $L^p(\mathbf{R})$. Si noti che $\mathcal{E}$ è numerabile; infatti $\mathcal{E}$ si può scrivere come l'unione disgiunta delle funzioni a gradino della forma (4.1) che hanno supporto contenuto in $[-n, n]$ ma non in $[-n + 1, n - 1]$, e ognuno di tali insiemi è numerabile (una funzione a gradino della forma (4.1) viene assegnata dando un numero naturale N e $3N$ numeri razionali).

Sia f in $L^p(\mathbf{R})$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora (per definizione)

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p < +\infty\,.$$

Sia n in $\mathbf{N}$ e definiamo $f_n(x) = f(x)\,\chi_{[-n,n]}(x)$. Allora $f_n(x)$ è in $L^p(\mathbf{R})$ (dal momento che $|f_n| \le |f|$) e f_n converge quasi ovunque in $\mathbf{R}$ a $f(x)$. Essendo $|f_n(x) - f(x)|^p \le 2^p\,|f(x)|^p$, per il Teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|^p\,dx = 0\,.$$

Pertanto, esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\int_{\mathbf{R}} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|^p\,dx \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.2}$$

La funzione f_{n_ε} è in $L^p(\mathbf{R})$ ed è nulla fuori da $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$. Siccome, per il Teorema 4.1.7, $C^0([-n_\varepsilon, n_\varepsilon], \mathbf{R})$ è denso in $L^p([-n_\varepsilon, n_\varepsilon])$, esiste g_ε, continua su $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ tale che

$$\int_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |g_\varepsilon(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \, . \tag{4.3}$$

La funzione g_ε, essendo continua sul compatto $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$, è uniformemente continua. Pertanto, fissato $\rho > 0$, esiste $\delta_\rho > 0$ tale che $|x - y| \leq \delta_\rho$ implica $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| \leq \rho$. Sia $\rho > 0$ tale che $2\, n_\varepsilon \, \rho^p < \frac{\varepsilon}{3}$, sia k intero tale che $\frac{2n_\varepsilon}{k} < \delta_\rho$ e decomponiamo $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ in k intervalli di ampiezza $\frac{2n_\varepsilon}{k}$. In questo modo, gli estremi x_h degli intervalli sono tutti numeri razionali. Definiamo poi

$$M_h = \max_{[x_h, x_{h+1}]} g_\varepsilon(x) \, , \qquad m_h = \min_{[x_h, x_{h+1}]} g_\varepsilon(x) \, .$$

Dal momento che $x_{h+1} - x_h = \frac{2n_\varepsilon}{k} < \delta_\rho$, si ha che $M_h - m_h \leq \rho$. Sia poi q_h un numero razionale tale che $0 \leq M_h - q_h \leq \rho$, e sia

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{h=0}^{k-1} q_h \, \chi_{[x_h, x_{h+1})}(x) \, .$$

Evidentemente, φ_ε appartiene ad $\mathcal{E}$. Si ha poi, essendo $|\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \rho$ su $[x_h, x_{h+1})$,

$$\int_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx = \sum_{h=0}^{k-1} \int_{[x_h, x_{h+1})} |q_h - g_\varepsilon(x)|^p \, dx \leq 2\, n_\varepsilon \, \rho^p \, ,$$

e pertanto

$$\int_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \, . \tag{4.4}$$

Mettendo insieme (4.2), (4.3) e (4.4), e ricordando che φ_ε è nulla fuori da $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ si ha

$$\int_{\mathbf{R}} |\varphi_\varepsilon(x) - f(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \, ,$$

e quindi $\mathcal{E}$ è denso in $L^p(\mathbf{R})$. ∎

Teorema 4.4.2 *Sia* $1 \leq p < +\infty$ *e sia* E *un insieme misurabile. Allora* $L^p(E)$ *è separabile.*

Dimostrazione. Se f è in $L^p(E)$, la funzione $\bar{f}$ definita su $\mathbf{R}$ come f in E e zero su E^c appartiene a $L^p(\mathbf{R})$. Per il teorema precedente, esiste una funzione a gradino in $\mathcal{E}$ tale che $d_p(\bar{f}, \varphi) \le \varepsilon$. Ma allora $\varphi\,\chi_E$ (che appartiene all'insieme numerabile ottenuto prendendo le restrizioni a E delle funzioni a gradino di $\mathcal{E}$) è tale che $d_p(f, \varphi\,\chi_E) \le \varepsilon$, e quindi si ha la tesi. ∎

Lo spazio $L^\infty(E)$, invece, non è separabile. Supponiamo per assurdo che lo sia, ovvero supponiamo che esista un insieme numerabile $\mathcal{E} = \{f_n\}$, denso in $L^\infty(E)$. Sia $\{E_n\}$ una partizione numerabile di E in insiemi misurabili, e definiamo φ nel modo seguente. Sia x in E; allora x appartiene ad uno, ed uno solo, degli E_n; sia $E_{n(x)}$ tale insieme. Se $f_{n(x)}(x) > 0$, definiamo $\varphi(x) = -1$; se $f_{n(x)}(x) \le 0$, definiamo $\varphi(x) = 1$. In altre parole,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\chi_{\{y\in E_n : f_n(y)\le 0\}}(x) - \chi_{\{y\in E_n : f_n(y)>0\}}(x)\right] .$$

La funzione φ è misurabile (perché lo sono gli insiemi $\{y \in E_n : f_n(y) \le 0\}$ e $\{y \in E_n : f_n(y) > 0\}$) ed è limitata (in modulo vale sempre 1 essendo gli E_n disgiunti). Pertanto, φ appartiene a $L^\infty(E)$. Si ha però

$$d_\infty(f_n, \varphi) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - \varphi(x)| \ge \operatorname{ess\,sup}_{E_n} |f_n(x) - \varphi(x)| \ge 1 ,$$

e quindi $\mathcal{E}$ non può essere denso in $L^\infty(E)$.

4.5 $L^2(E)$

Lo spazio $L^2(E)$ è differente da tutti gli altri spazi L^p perché è possibile definire su di esso un prodotto scalare. Se f e g sono in $L^2(E)$, definiamo

$$(f \,|\, g) = \int_E f(x)\, g(x)\, dx .$$

Si verifica facilmente che $(f \,|\, g)$ è lineare in entrambi gli argomenti, che è simmetrico, che $(f \,|\, f)$ è non negativo e nullo se e solo se $f = 0$ (inteso come classe in $L^2(E)$, ovvero $f = 0$ q.o.) e che, per ogni f e g in $L^2(E)$ si ha

$$|\,(f \,|\, g)\,| \le \sqrt{(f \,|\, f)}\,\sqrt{(g \,|\, g)}\,;$$

questa disuguaglianza segue infatti dalla disuguaglianza di Hölder con $p = q = 2$. Pertanto, $L^2(E)$ è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Dal momento che ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale induce una distanza secondo la formula $d(x, y) = \sqrt{(x - y \,|\, x - y)}$, la distanza indotta su $L^2(E)$ dal prodotto scalare appena definito è proprio d_2:

$$d_2(f, g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(f - g \,|\, f - g)} \, .$$

Essendo $(L^2(E), d_2)$ uno spazio metrico completo (come tutti gli $L^p(E)$), lo spazio vettoriale $L^2(E)$, dotato del prodotto scalare $(\cdot \,|\, \cdot)$ (che induce una distanza rispetto alla quale lo spazio metrico è completo) si dice **spazio di Hilbert**.

4.5.1 Gli spazi di Hilbert

Come detto sopra, uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare che risulti completo come spazio metrico (con la distanza indotta dal prodotto scalare). Come ogni spazio vettoriale, anche uno spazio di Hilbert ha una base. Nel caso particolare in cui lo spazio di Hilbert sia separabile (come spazio metrico), la base è numerabile, e si può scegliere in maniera "semplice".

Teorema 4.5.1 *Sia $(H, (\cdot \,|\, \cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile. Allora esiste una successione $\{e_n\}$ di vettori di H tale che:*

i) $(e_n \,|\, e_m) = \delta_{n,m}$ *(dove $\delta_{n,m}$ è il simbolo di Kronecker);*

ii) per ogni vettore x di H, detto

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \,|\, e_k) \, e_k \, ,$$

si ha che $S_n(x)$ converge a x in (H, d).

In altre parole, il teorema precedente afferma che in uno spazio di Hilbert separabile esiste una base numerabile fatta di vettori ortonormali. Tale base si dice **sistema ortonormale completo** in H. Ci soffermiamo ora su due conseguenze del teorema precedente.

Teorema 4.5.2 (Bessel, Parseval) *Sia* $\{e_n\}$ *una successione di vettori di uno spazio di Hilbert* $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ *tale che* $(e_n\,|\,e_m) = \delta_{n,m}$. *Allora, per ogni* x *in* H, *si ha la* **disuguaglianza di Bessel***:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [(x\,|\,e_k)]^2 \le (x\,|\,x)\ . \tag{5.1}$$

Se, in più, la successione $\{e_n\}$ *soddisfa la ii) del teorema precedente, allora, si ha l'***identità di Parseval***:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [(x\,|\,e_k)]^2 = (x\,|\,x)\ . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Sia

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\ (x\,|\,e_k)\ e_k\,,$$

e calcoliamo $(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x)$. Essendo il prodotto scalare bilineare e simmetrico, si ha

$$(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x) = (S_n(x)\,|\,S_n(x)) - 2\,(S_n(x)\,|\,x) + (x\,|\,x)\ .$$

Si ha poi

$$(S_n(x)\,|\,x) = \left(\sum_{k=1}^{n}\ (x\,|\,e_k)\ e_k\,\middle|\,x\right) = \sum_{k=1}^{n}\ (x\,|\,e_k)\ (x\,|\,e_k) = \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}(S_n(x)\,|\,S_n(x)) &= \left(\sum_{k=1}^{n}\ (x\,|\,e_k)\ e_k\,\middle|\,\sum_{h=1}^{n}\ (x\,|\,e_h)\ e_h\right)\\ &= \sum_{h,k=1}^{n}\ (x\,|\,e_k)\ (x\,|\,e_h)\ (e_k\,|\,e_h) = \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x) = (x\,|\,x) - \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,. \tag{5.3}$$

Essendo $(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x) \ge 0$, se ne deduce

$$\sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2 \le (x\,|\,x)\ , \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,,$$

e quindi la (5.1) per n tendente ad infinito. Se, poi, $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale completo in H, allora $(S_n(x) - x \,|\, S_n(x) - x)$ tende a zero per n tendente ad infinito, e dalla (5.3) segue la (5.2). ■

Esempio 4.5.3 Sia $H = L^2((0,1))$ e sia, per k in $\mathbf{N}$,

$$e_k = 2^{\frac{k}{2}}\, \chi_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]}\,.$$

Essendo $e_k(x)\, e_h(x) = 0$ per ogni $k \neq h$, si ha $(e_k \,|\, e_h) = 0$; inoltre,

$$\int_{(0,1)} e_k^2(x)\, dx = 2^k \int_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]} dx = 1\,,$$

e quindi $\{e_k\}$ è un sistema ortonormale in H. Il sistema non è, però, completo. Sia infatti $f(x) = x$. Allora

$$c_k(f) = \int_{(0,1)} f(x)\, e_k(x)\, dx = 2^{\frac{k}{2}} \int_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]} x\, dx = \frac{3}{2}\, \frac{1}{2^{\frac{3k}{2}}}\,,$$

e si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(f) = \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{9}{28} < \frac{1}{2} = (f \,|\, f)\,.$$

Dal momento che non vale l'identità di Parseval, il sistema ortonormale non può essere completo. Alternativamente, detta

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\, e_k(x) = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]}(x)\,,$$

si vede facilmente che $g \neq f$ (ad esempio, su $[1/2, 1]$, g vale identicamente $3/4$).

Definizione 4.5.4 Sia $(H, (\cdot \,|\, \cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in H. Sia x in H e sia $c_k(x) = (x \,|\, e_k)$ per ogni k in $\mathbf{N}$. La successione $\{c_k(x)\}$ si dice **successione dei coefficienti di Fourier** di x.

Dal momento che si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(x) = (x \,|\, x) < +\infty\,,$$

ne segue che se x è in H, allora la successione dei suoi coefficienti di Fourier è in ℓ^2. In questa maniera, possiamo definire un'applicazione $\mathcal{F} : H \to \ell^2$, che ad ogni x di H associa la successione $\{c_k(x)\}$ dei suoi coefficienti di Fourier.

Teorema 4.5.5 *Sia $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in H. Sia $\mathcal{F} : H \to \ell^2$ l'applicazione che ad ogni x di H associa la successione $\{c_k(x)\}$ dei coefficienti di Fourier di x. Allora $\mathcal{F}$ è un'isometria biunivoca tra (H, d) e (ℓ^2, d_2).*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{F}$ è iniettiva, suriettiva, e che, per ogni x e y in H

$$d_2(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = d(x, y) = \sqrt{(x - y\,|\,x - y)}\,. \tag{5.4}$$

Iniziamo con l'osservare che $\mathcal{F}$ è lineare (dal momento che lo è il prodotto scalare); pertanto l'iniettività è equivalente a dimostrare che $\mathcal{F}(x) = \{0\}$ se e solo se $x = 0$. Ovviamente, $\mathcal{F}(0) = \{0\}$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{F}(x) = \{0\}$, e quindi che $(x\,|\,e_k) = 0$ per ogni k in $\mathbf{N}$. Dall'identità di Parseval segue allora

$$(x\,|\,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(x) = 0\,,$$

e quindi $x = 0$. Sia ora $\{c_k\}$ in ℓ^2. Definiamo

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e_k\,,$$

ed osserviamo che x_n è una successione di Cauchy in (H, d). Infatti,

$$d(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n - x_m\,|\,x_n - x_m)} = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

e l'ultima quantità può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo n e m grandi, dal momento che $\{c_k\}$ è in ℓ^2. Essendo (H, d) completo, x_n converge a x in H e si ha (per definizione di convergenza di una serie),

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\, e_k\,.$$

Inoltre, essendo $(\cdot \,|\, e_k)$ una funzione continua (come si verifica facilmente), ed essendo $(x \,|\, e_k) = (x_n \,|\, e_k)$ per ogni $n \geq k$,

$$c_k(x) = (x \,|\, e_k) = \lim_{n\to+\infty} (x_n \,|\, e_k) = \lim_{n\to+\infty} c_k = c_k\,.$$

Pertanto, $\mathcal{F}(x) = \{c_k\}$ e quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva. Rimane da dimostrare la (5.4). Osservando che $c_k(x) - c_k(y) = c_k(x-y)$, la (5.4) segue direttamente dall'identità di Parseval e dalla definizione di d_2 in ℓ^2. ■

In definitiva, abbiamo dimostrato che ogni spazio di Hilbert separabile è isometrico (tramite $\mathcal{F}$) a ℓ^2, ovvero che per studiare uno spazio di Hilbert separabile è sufficiente studiare ℓ^2 (e conoscere un sistema ortonormale completo in H).

4.5.2 $L^2([-\pi,\pi])$ e serie di Fourier

Consideriamo l'insieme (numerabile) di funzioni in $L^2([-\pi,\pi])$

$$\mathcal{T} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\cos(kx)\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin(kx)\,,\ k \in \mathbf{N} \right\}\,.$$

Si vede facilmente che se e_h e e_k sono due funzioni di $\mathcal{T}$, allora si ha $(e_h \,|\, e_k) = \delta_{h,k}$. Pertanto, $\mathcal{T}$ è un insieme ortonormale di funzioni. Essendo $L^2([-\pi,\pi])$ separabile, per il Teorema 4.5.1, esiste un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi])$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale completo, ovvero che, se f è in $L^2([-\pi,\pi])$, detti per $k \geq 1$,

$$a_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_E f(x)\,\cos(kx)\,dx\,, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_E f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx\,,$$

e

$$a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_E f(x)\,dx\,,$$

si ha che

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k(f)\,\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)]\,,$$

nel senso che la serie converge in $L^2([-\pi,\pi])$. Si noti che i coefficienti di Fourier di una f di $L^2([-\pi,\pi])$ non dipendono dalla scelta di f nella sua classe di equivalenza quasi ovunque.

Sia allora f in $L^2([-\pi,\pi])$, e sia $\{a_0(f), a_k(f), b_k(f)\}$ la successione dei suoi coefficienti di Fourier. Dal momento che $\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale di vettori, per il punto i) del Teorema 4.5.1 (ovvero per la disuguaglianza di Bessel), si ha

$$a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k^2(f) + b_k^2(f)] \leq \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\, dx\,.$$

Pertanto, le due successioni $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ sono in ℓ^2, e quindi sia $a_k(f)$ che $b_k(f)$ tendono a zero quando k tende ad infinito. Questo risultato è noto come Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.5.6 (Riemann-Lebesgue) *Sia f una funzione in $L^2([-\pi,\pi])$. Allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, \cos(kx)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, \mathrm{sen}(kx)\, dx = 0\,.$$

Sia f in $L^2([-\pi,\pi])$, sia n in $\mathbf{N}$, e definiamo

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} [a_k(f)\, \cos(kx) + b_k(f)\, \mathrm{sen}(kx)]\,.$$

La completezza di $\mathcal{T}$ è equivalente a dimostrare che $S_n(f)$ converge ad f in $L^2([-\pi,\pi])$.

Teorema 4.5.7 *Siano $-\pi < a < b < \pi$, e sia $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Allora $S_n(f)$ converge quasi ovunque a f.*

Dimostrazione. Sia n in $\mathbf{N}$ e definiamo

$$T_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\,.$$

È facile verificare per induzione che, per ogni $x \neq 0$,

$$T_n(x) = \frac{\mathrm{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

Se $x = 0$, è sufficiente definire $T_n(0) = n + \frac{1}{2}$ per ottenere che $T_n(x)$ è una funzione continua su $[-\pi, \pi]$. Si ha poi, ricordando la definizione di $a_0(f)$, $a_k(f)$ e $b_k(f)$,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} [a_k(f)\,\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,\frac{1}{2}\,dy \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,[\cos(ky)\,\cos(kx) + \mathrm{sen}(ky)\,\mathrm{sen}(kx)]\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(y-x))\right] dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,T_n(y-x)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi-x,\pi-x]} f(x+y)\,T_n(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

A questo punto, consideriamo $\tilde{f}$ la prolungata per periodicità di f (definita solo su $[-\pi, \pi]$). Pertanto, $\tilde{f}$ è periodica di periodo 2π, così come lo è (per definizione) T_n, cosicché (essendo ovviamente $S_n(f)(x) = S_n(\tilde{f})(x)$ per ogni x in $[-\pi, \pi]$),

$$S_n(\tilde{f})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi-x,\pi-x]} \tilde{f}(x+y)\,T_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x+y)\,T_n(y)\,dy\,.$$

D'altra parte, essendo (come si verifica facilmente)

$$\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} T_n(y)\,dy = 1\,,$$

possiamo scrivere, per x in $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) - f(x) &= S_n(\tilde{f})(x) - \tilde{f}(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} [\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)]\,T_n(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\,\mathrm{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) y\right)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{[\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)]\,\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\,\mathrm{sen}(ny)\,dy \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} [\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)]\,\cos(ny)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Sia ora x in (a, b). Allora $\tilde{f}(x + y) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + y) - 1 = 0$ per ogni y in $(a - x, b - x)$. Pertanto,

$$g(y) = \frac{[\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)]\,\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{y}{2}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in (a-x, b-x), \\ -\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{y}{2}\right)} & \text{altrove in } [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Dal momento che $\mathrm{sen}\left(\frac{y}{2}\right)$ si annulla (in $[-\pi, \pi]$) solo nell'origine, e che 0 appartiene a $(a - x, b - x)$ (essendo x in (a, b)), si ha che g è una funzione limitata su $[-\pi, \pi]$. Essendo anche misurabile, è in $L^\infty([-\pi, \pi])$ e quindi (dato che $m([-\pi, \pi]) = 2\pi < +\infty$) anche in $L^2([-\pi, \pi])$. Si ha allora, per il lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} g(y)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy = 0\,.$$

Con ragionamento analogo (osservando che, per ogni x, $y \mapsto \tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)$ è in $L^\infty([-\pi, \pi])$), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} [\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)]\,\cos(ny)\,dy = 0\,.$$

Pertanto, se x è in (a, b), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)\,.$$

In maniera identica si prova che se x non appartiene a $[a, b]$, allora $S_n(f)(x)$ tende a $f(x)$ (ovvero a zero). Pertanto, $S_n(f)(x)$ tende a $f(x)$ per ogni x diverso da a, b, e quindi quasi ovunque. ∎

Osservazione 4.5.8 Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(b) = \frac{1}{2}\,.$$

Teorema 4.5.9 *Siano $-\pi < a < b < \pi$, e sia $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Allora $S_n(f)$ converge in $L^2([-\pi, \pi])$ ad f.*

Dimostrazione. Dal momento che $S_n(f)$ tende a f quasi ovunque, $S_n^2(f)$ tende a f^2 quasi ovunque. Per il lemma di Fatou, si ha allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx\,.$$

Essendo

$$\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2(f)+b_k^2(f)]\right),$$

dalla disuguaglianza di Bessel segue

$$\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx \le \frac{1}{\pi}\left(a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}[a_k^2(f)+b_k^2(f)]\right) \le \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,,$$

per ogni n in $\mathbf{N}$, e quindi

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,,$$

e quindi, dal momento che, per la (5.3),

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x)-f(x)|^2\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx - \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x)-f(x)|^2\,dx = 0\,,$$

ovvero la tesi. ■

Teorema 4.5.10 *Siano f e g in $L^2([-\pi,\pi])$; allora, per ogni n in $\mathbf{N}$,*

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x)-S_n(g)(x)|^2\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} |f(x)-g(x)|^2\,dx\,.$$

Dimostrazione. Essendo $S_n(f) - S_n(g) = S_n(f-g)$, è sufficiente dimostrare che, per ogni n in $\mathbf{N}$, e per ogni h in $L^2([-\pi,\pi])$,

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(h)(x)|^2\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} |h(x)|^2\,dx\,.$$

Ma questa è esattamente la disuguaglianza di Bessel. ■

Teorema 4.5.11 *$\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi])$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 4.5.9, e dalla linearità dell'applicazione S_n segue che, se

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} q_i \, \chi_{(a_i,b_i)}(x)\,, \tag{5.5}$$

allora $S_n(\varphi)$ converge a φ in $L^2([-\pi,\pi])$. L'insieme delle funzioni semplici φ della forma appena scritta è però denso in $L^2([-\pi,\pi])$ (lo è se si prendono q_i, a_i e b_i razionali per il Teorema 4.4.1, e lo è dunque a maggior ragione se q_i, a_i e b_i sono numeri reali). Se f è in $L^2([-\pi,\pi])$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste φ_ε funzione semplice come in (5.5) tale che

$$d_2(f,\varphi_\varepsilon) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

D'altra parte, per il Teorema 4.5.10, per ogni n in $\mathbf{N}$ si ha

$$d_2(S_n(f), S_n(\varphi_\varepsilon)) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x) - S_n(\varphi_\varepsilon)(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Infine, esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$d_2(\varphi_\varepsilon, S_n(\varphi_\varepsilon)) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |\varphi_\varepsilon(x) - S_n(\varphi_\varepsilon)(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha, per la disguguaglianza triangolare,

$$d_2(f, S_n(f)) \leq \varepsilon\,,$$

e quindi la tesi. ■

Osservazione 4.5.12 Il Teorema precedente dà una seconda dimostrazione del fatto che le funzioni continue sono dense in $L^2([-\pi,\pi])$; infatti, $S_n(f)$ è una funzione continua per ogni n in $\mathbf{N}$. È naturale a questo punto chiedersi se, data una f in $L^2([-\pi,\pi])$, la successione $S_n(f)$ (che converge a f in $L^2([-\pi,\pi])$) non abbia delle proprietà di convergenza migliori, come ad esempio la convergenza puntuale, fermo restando il fatto che (come tutte le successioni convergenti in $L^2([-\pi,\pi])$) da $S_n(f)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque ad f. Il Teorema 4.5.7 ci dice che non è possibile che la convergenza sia puntuale ovunque (per le funzioni caratteristiche "saltano" due punti), ed allora si potrebbe sperare di avere convergenza "tranne al più un numero finito di punti". In questa maniera, di tutte le funzioni nella classe di equivalenza di f, la serie di Fourier ne sceglierebbe una "migliore" di tutte le altre. Purtroppo, la convergenza di $S_n(f)$ ad f è "solo" quasi ovunque.

Teorema 4.5.13 (Carleson, 1966) *Sia f in $L^2([-\pi,\pi])$. Allora $S_n(f)$ converge a f quasi ovunque.*

Per avere convergenza puntuale della serie di Fourier è allora necessario fare delle ipotesi più restrittive su f (si rimanda a testi di Analisi II per le ipotesi sufficienti per la convergenza quasi ovunque). Osserviamo qui che una condizione sufficiente per la convergenza puntuale di $S_n(f)$ a f è l'appartenenza a ℓ^1 delle successioni $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$. Infatti, in questo caso si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \max_{[-\pi,\pi]} |a_k(f)\,\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|\,,$$

cosicché la serie $S_n(f)$ è totalmente (dunque uniformemente) convergente in $C^0([-\pi,\pi],\mathbf{R})$; in questo caso, però, f è — obbligatoriamente — una funzione continua.

Osservazione 4.5.14 Se si considera $L^2([-T,T])$ invece di $L^2([-\pi,\pi])$, il sistema ortonormale completo diventa

$$\mathcal{T} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2T}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,,\ \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,,\ k\in\mathbf{N} \right\}.$$

Osservazione 4.5.15 Affinché i coefficienti di Fourier siano definiti, è sufficiente che f appartenga allo spazio (più grande) $L^1([\pi,\pi])$. Infatti, essendo $\cos(kx)$ e $\mathrm{sen}(kx)$ in $L^\infty([-\pi,\pi])$, le funzioni $f(x)\,\cos(kx)$ e $f(x)\,\mathrm{sen}(kx)$ sono in $L^1([\pi,\pi])$. Vale, inoltre, il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.5.16 *Per ogni f in $L^1([\pi,\pi])$ si ha*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \chi_{(a,b)}$. Allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, \cos(kx)\, dx = \mathrm{R}\int_a^b \cos(kx)\, dx = \frac{\mathrm{sen}(kb) - \mathrm{sen}(ka)}{k}\,,$$

che tende a zero quando k tende ad infinito. Pertanto, per ogni funzione semplice φ,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \varphi(x)\, \cos(kx)\, dx = 0\,.$$

Approssimando (in $L^1([-\pi,\pi])$) una funzione f con una successione φ_n di funzioni semplici si ha allora la tesi. ■

Ovviamente, non abbiamo più a disposizione la disuguaglianza di Bessel (perché f^2 può non essere sommabile, e se lo è la f è — per definizione — in $L^2([-\pi,\pi])$), né tantomeno un prodotto scalare: il fatto che

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos(kx)\, \mathrm{sen}(hx)\, dx = 0\,,$$

non va interpretato come una relazione di ortogonalità tra le due funzioni, ma solo come un "risultato numerico": l'integrale del prodotto è nullo. Comunque sia, è lecito chiedersi se la serie di Fourier di una funzione in $L^1([-\pi,\pi])$ converga, e — nel caso lo faccia — se converga ad f.

Esempio 4.5.17 (Kolmogorov, 1926) Esiste K in $L^1([-\pi,\pi])$ tale che la serie di Fourier $S_n(K)(x)$ diverge in **ogni** x di $[-\pi,\pi]$.

Grazie a questo esempio, possiamo affermare che, in generale, la serie di Fourier di una funzione f di $L^1([-\pi,\pi])$ non converge ad f in $L^1([-\pi,\pi])$, né converge a qualsiasi altra funzione di $L^1([-\pi,\pi])$; se così fosse per la funzione dell'esempio appena citato, allora $S_n(K)(x)$ dovrebbe convergere quasi ovunque, a meno di sottosuccessioni, al suo limite in $L^1([-\pi,\pi])$, che però è una funzione finita quasi ovunque; e questo contrasta con il fatto che $S_n(K)$ (e quindi ogni sua sottosuccessione) diverge ovunque.

A questo punto resta aperta la domanda — e continua a rimanerlo ancor oggi — su quale sia il miglior spazio per definire la serie di Fourier in modo che questa converga: si tratta di uno spazio di funzioni "compreso" tra $L^2([-\pi,\pi])$ e $L^1([-\pi,\pi])$, ma non è ancora stato dimostrato quale sia. Ad esempio, si sa che la serie di Fourier di una funzione f di $L^p([-\pi,\pi])$, con $1 < p < 2$, converge a f in $L^p([-\pi,\pi])$.

Osservazione 4.5.18 Ben più facile da dimostrare dei risultati citati precedentemente è il fatto che la serie di Fourier di una funzione f di $L^\infty([-\pi, \pi])$ non converga, in generale, ad f in $L^\infty([-\pi, \pi])$. Infatti, se $S_n(f)$ converge ad f in $L^\infty([-\pi, \pi])$, allora $S_n(f)$ converge uniformemente ad f e quindi (essendo $S_n(f)$ una funzione continua), f è continua. Quindi, la serie di Fourier di una funzione f essenzialmente limitata che non sia quasi ovunque uguale ad una funzione continua (ad esempio, $\operatorname{sgn}(x)$) non può convergere ad f in $L^\infty([-\pi, \pi])$.