

# Capitolo 3

## Teoria dell'integrazione

Come già per la misura secondo Peano-Jordan, ricordiamo brevemente la definizione di integrale secondo Riemann.

### 3.1 L'integrale secondo Riemann

Sia  $I = [a, b]$  un intervallo di  $\mathbf{R}$ ; una partizione  $P$  di  $I$  viene data assegnando  $n + 1$  punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Se  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione limitata e  $P$  è una partizione di  $I$ , definiamo

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i,$$
$$s(P, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i.$$

Successivamente, detto  $\mathcal{P}$  l'insieme delle partizioni di  $I$ , definiamo

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{S(P, f), P \in \mathcal{P}\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{s(P, f), P \in \mathcal{P}\},$$

che chiamiamo, rispettivamente, integrale superiore di Riemann e integrale inferiore di Riemann di  $f$ .

Si vede abbastanza facilmente che per ogni funzione  $f$  limitata su  $I$  si ha

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx \leq \mathbf{R} \int_a^{\overline{b}} f(x) dx ,$$

il che suggerisce di definire integrabile secondo Riemann una funzione limitata su  $I$  tale che si abbia

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx = \mathbf{R} \int_a^{\overline{b}} f(x) dx .$$

In questo caso, definiamo

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx = \mathbf{R} \int_a^{\overline{b}} f(x) dx .$$

Sia ora  $P$  una partizione di  $I$  con  $n + 1$  punti, e siano  $c_1, \dots, c_n$   $n$  numeri reali. Una **funzione a gradino** è una combinazione lineare della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) .$$

Se definiamo (in maniera naturale)

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) ,$$

si vede subito che, data una partizione  $P$  di  $I$ , si ha

$$S(P, f) = \int_a^b \overline{\varphi}(x) dx ,$$

dove  $\overline{\varphi}(x)$  è la funzione a gradino corrispondente agli intervalli della partizione  $P$  e ai valori  $M_1, \dots, M_n$ . Sempre per definizione di  $\overline{\varphi}(x)$ , si ha  $f(x) \leq \overline{\varphi}(x)$  per ogni  $x$  in  $I$ . Analogamente,

$$s(P, f) = \int_a^b \underline{\varphi}(x) dx ,$$

dove  $\underline{\varphi}(x)$  è la funzione a gradino corrispondente agli intervalli della partizione  $P$  e ai valori  $m_1, \dots, m_n$ . Nuovamente, dalla definizione di  $\underline{\varphi}(x)$ , segue che  $\underline{\varphi}(x) \leq f(x)$  per ogni  $x$  in  $I$ .

Alla luce di queste considerazioni, si ha allora

$$\overline{\text{R}} \int_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \overline{\varphi}(x) dx, \overline{\varphi}(x) \text{ a gradino, } f(x) \leq \overline{\varphi}(x) \text{ in } I \right\},$$

e

$$\underline{\text{R}} \int_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \underline{\varphi}(x) dx, \underline{\varphi}(x) \text{ a gradino, } \underline{\varphi}(x) \leq f(x) \text{ in } I \right\},$$

**Esempio 3.1.1** Come è noto, la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbf{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann; infatti, qualsiasi sia la partizione  $P$  di  $[0, 1]$ , si ha  $S(P, D) = 1$  e  $s(P, D) = 0$ , cosicché

$$\overline{\text{R}} \int_a^b f(x) dx = 1, \quad \underline{\text{R}} \int_a^b f(x) dx = 0.$$

Inoltre, se consideriamo la successione  $f_n$  di funzioni definita da

$$f_n(x) = \chi_{\{r_1, \dots, r_n\}}(x),$$

dove  $\{r_n\}$  è un'enumerazione dei razionali di  $[0, 1]$ , si ha che  $f_n$  è integrabile secondo Riemann, che il suo integrale è nullo per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ , e che  $f_n$  converge puntualmente (ed anche in maniera monotona) a  $D(x)$ , che non è integrabile. Pertanto, il chiedersi se valga l'identità

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{R} \int_0^1 f_n(x) dx = \text{R} \int_0^1 D(x) dx,$$

non ha senso perché l'integrale (secondo Riemann) di  $D$  non è definito.

Si ha però che  $D(x) = \chi_{\mathbf{Q} \cap [0, 1]}(x)$ , cioè la funzione caratteristica di un insieme misurabile (secondo Lebesgue, non secondo Peano-Jordan). Vogliamo allora “cambiare” l'integrale in modo che — quanto meno — le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili siano integrabili (e il loro integrale valga, secondo la ben nota regola “base per altezza”, la misura dell'insieme); inoltre vogliamo anche ottenere un integrale che si comporti “bene” rispetto al passaggio al limite: se  $f_n$  è una successione di funzioni integrabili convergente ad una funzione integrabile  $f$ , vogliamo dare dell'ipotesi ragionevoli sulla convergenza e sulle  $f_n$  affinché il limite degli integrali delle  $f_n$  sia proprio l'integrale di  $f$ .

## 3.2 L'integrale secondo Lebesgue

### 3.2.1 Funzioni limitate su insiemi di misura finita

In tutta questa sottosezione supporremo valide le seguenti ipotesi

- $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbf{R}$  con  $m(E) < +\infty$ ;
- $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione limitata.

Ricordiamo che una **funzione semplice**  $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione misurabile che assume un numero finito di valori. Detti  $a_1, \dots, a_n$  tali valori, e definito  $A_i = \{x \in E : \varphi(x) = a_i\}$  si ha

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x).$$

Si noti che gli  $A_i$  sono a due a due disgiunti, che sono misurabili, e che l'unione degli  $A_i$  è  $E$ . Se supponiamo che  $a_1, \dots, a_n$  siano i valori diversi da zero assunti dalla funzione semplice  $\varphi$ , la rappresentazione

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

si dice **canonica**. Nel caso della rappresentazione canonica, l'unione degli  $A_i$  è ovviamente  $E \setminus \{x \in E : \varphi(x) = 0\} = E \setminus G_0(\varphi)$ .

**Definizione 3.2.1** Sia  $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione semplice, e sia

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

la sua rappresentazione canonica. Definiamo

$$\int_E \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i). \quad (2.1)$$

La rappresentazione canonica è unica, ma il valore dell'integrale non cambia se  $\varphi$  viene scritta come combinazione di funzioni caratteristiche in maniera differente.

**Teorema 3.2.2** Sia

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}(x),$$

con gli insiemi  $B_j$  misurabili e a due a due disgiunti. Allora

$$\int_E \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^m b_j m(B_j).$$

**Dimostrazione.** Se  $a$  è un valore assunto da  $\varphi(x)$ , definiamo  $A_a = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$ . Si ha ovviamente

$$A_a = \bigcup_{h:b_h=a} B_h,$$

e pertanto, essendo i  $B_h$  a due a due disgiunti,

$$m(A_a) = \sum_{h:b_h=a} m(B_h).$$

Ma allora, detti  $a_1, \dots, a_n$  i valori distinti da zero assunti da  $\varphi$ , cosicché

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

è la rappresentazione canonica, si ha (ricordando che  $a_i \neq 0$  per ogni  $i$ )

$$\begin{aligned} \int_E \varphi(x) dx &= \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{h:b_h=a_i} m(B_h) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{h:b_h=a_i} b_h m(B_h) = \sum_{b_j \neq 0} b_j m(B_j) = \sum_{j=1}^m b_j m(B_j), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

L'integrale così definito gode delle consuete proprietà dell'integrale: additività e monotonia.

**Teorema 3.2.3** Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due funzioni semplici su  $E$ , e siano  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ . Allora

$$\int_E [a\varphi(x) + b\psi(x)] dx = a \int_E \varphi(x) dx + b \int_E \psi(x) dx. \quad (2.2)$$

Se  $\varphi \geq \psi$  q.o., allora

$$\int_E \varphi(x) dx \geq \int_E \psi(x) dx. \quad (2.3)$$

**Dimostrazione.** Siano

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}(x),$$

le rappresentazioni canoniche di  $\varphi$  e  $\psi$ , e siano  $A_0 = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$  e  $B_0 = \{x \in E : \psi(x) = 0\}$ . Definiamo  $N = (n+1)(m+1)$  e

$$\mathcal{F} = \{A_i \cap B_j, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\} = \{E_k, k = 1, \dots, N\}.$$

Per definizione, gli  $E_k$  sono a due a due disgiunti e la loro unione è tutto  $E$ . Possiamo allora scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}(x),$$

con  $a_k = a_i$  per ogni  $k$  tale che  $E_k \subseteq A_i$ , e  $b_k = b_j$  per ogni  $k$  tale che  $E_k \subseteq B_j$ . Si ha allora

$$a\varphi(x) + b\psi(x) = \sum_{k=1}^N [a a_k + b b_k] \chi_{E_k}(x),$$

da cui, per il Teorema 3.2.2,

$$\begin{aligned} \int_E [a\varphi(x) + b\psi(x)] dx &= \sum_{k=1}^N [a a_k + b b_k] m(E_k) \\ &= a \sum_{k=1}^N a_k m(E_k) + b \sum_{k=1}^N b_k m(E_k) \\ &= a \int_E \varphi(x) dx + b \int_E \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Dal momento che per definizione l'integrale di una funzione semplice non negativa quasi ovunque è non negativo (l'insieme  $E_0''(\varphi)$  su cui  $\varphi$  assume valori negativi ha misura nulla, e quindi il suo contributo all'integrale è nullo), si ha, per quanto appena dimostrato,

$$0 \leq \int_E [\varphi(x) - \psi(x)] dx = \int_E \varphi(x) dx - \int_E \psi(x) dx,$$

da cui (2.3). ■

**Osservazione 3.2.4** Siccome l'integrale di  $\chi_E$  è  $m(E)$  per definizione, per il Teorema 3.2.3 l'integrale di  $a\chi_E$  è  $am(E)$  e quindi l'integrale della funzione semplice

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

è

$$\int_E \varphi(x) dx = \int_E \left( \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_E \chi_{E_i}(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i),$$

che è lo stesso risultato del Teorema 3.2.2, senza però l'ipotesi che gli  $E_i$  siano a due a due disgiunti. In definitiva, se

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

è una **qualsiasi** rappresentazione della funzione semplice  $\varphi$ , allora

$$\int_E \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i).$$

**Definizione 3.2.5** Sia ora  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione misurabile e limitata. Allora sono non vuoti

$$\overline{S}(f) = \{ \overline{\varphi} : E \rightarrow \mathbf{R}, \overline{\varphi} \text{ semplice, } f(x) \leq \overline{\varphi}(x) \text{ per ogni } x \},$$

e

$$\underline{S}(f) = \{ \underline{\varphi} : E \rightarrow \mathbf{R}, \underline{\varphi} \text{ semplice, } \underline{\varphi}(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \}.$$

Si ha infatti che  $(\sup_E f) \chi_E$  è in  $\overline{S}(f)$ , mentre  $(\inf_E f) \chi_E$  appartiene a  $\underline{S}(f)$ . Definiamo i due numeri reali

$$\overline{\int_E} f(x) dx = \inf \left\{ \int_E \overline{\varphi}(x) dx, \overline{\varphi} \in \overline{S}(f) \right\},$$

e

$$\underline{\int_E} f(x) dx = \sup \left\{ \int_E \underline{\varphi}(x) dx, \underline{\varphi} \in \underline{S}(f) \right\}.$$

Si noti che, per il Teorema 3.2.3 e per definizione di estremo superiore ed inferiore, si ha

$$(\inf_E f) m(E) \leq \underline{\int_E} f(x) dx \leq \overline{\int_E} f(x) dx \leq (\sup_E f) m(E).$$

Come già per l'integrale secondo Riemann, ci chiediamo se e quando questi due valori siano uguali.

**Teorema 3.2.6** *Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata, con  $E$  misurabile di misura finita. Allora*

$$\int_{\underline{E}} f(x) dx = \overline{\int_E f(x) dx} \quad (2.4)$$

se e solo se  $f$  è misurabile.

**Dimostrazione.** La prima parte della dimostrazione ricorda il terzo passo della dimostrazione del Teorema 2.4.12, usando il fatto che è possibile approssimare uniformemente funzioni misurabili con funzioni semplici.

Supponiamo che  $f$  sia misurabile e che  $-M \leq f(x) \leq M$  per ogni  $x$  in  $E$ . Sia  $n$  in  $\mathbf{N}$  e definiamo, per  $k = -n, \dots, n$ ,

$$E_k = \left\{ x \in E : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\} = E_{\frac{(k-1)M}{n}}(f) \cap E_{\frac{kM}{n}}'''(f),$$

Essendo  $f$  misurabile, lo sono gli  $E_k$ . Inoltre,  $E_k \cap E_h = \emptyset$ , e l'unione degli  $E_k$  è tutto  $E$ . Definiamo

$$\overline{\varphi}_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{kM}{n} \chi_{E_k}(x), \quad \underline{\varphi}_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{(k-1)M}{n} \chi_{E_k}(x),$$

cosicché  $\overline{\varphi}_n$  è in  $\overline{S}(f)$ , mentre  $\underline{\varphi}_n$  è in  $\underline{S}(f)$ . Pertanto

$$\overline{\int_E f(x) dx} \leq \int_E \overline{\varphi}_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{kM}{n} m(E_k),$$

e

$$\int_{\underline{E}} f(x) dx \geq \int_E \underline{\varphi}_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{(k-1)M}{n} m(E_k).$$

Si ha così

$$0 \leq \overline{\int_E f(x) dx} - \int_{\underline{E}} f(x) dx \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n m(E_k) = \frac{M}{n} m(E).$$

Facendo tendere  $n$  ad infinito, si trova che

$$\overline{\int_E f(x) dx} = \int_{\underline{E}} f(x) dx,$$

come si voleva dimostrare.

Viceversa, supponiamo che si abbia

$$\overline{\int_E} f(x) dx = \underline{\int_E} f(x) dx.$$

Per definizione di estremo superiore ed inferiore, per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$  esistono  $\overline{\varphi}_n$  in  $\overline{S}(f)$  e  $\underline{\varphi}_n$  in  $\underline{S}(f)$  tali che

$$0 \leq \int_E \overline{\varphi}_n(x) dx - \int_E \underline{\varphi}_n(x) dx \leq \frac{1}{n}. \quad (2.5)$$

Essendo sia  $\overline{\varphi}_n$  che  $\underline{\varphi}_n$  misurabili, per il Teorema 2.4.7 sono misurabili le funzioni

$$\overline{\varphi}(x) = \inf \{ \overline{\varphi}_n(x), n \in \mathbf{N} \}, \quad \underline{\varphi}(x) = \sup \{ \underline{\varphi}_n(x), n \in \mathbf{N} \}.$$

Si ha ovviamente

$$\underline{\varphi}(x) \leq \underline{\varphi}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\varphi}_n(x) \leq \overline{\varphi}(x),$$

cosicché se dimostriamo che  $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$  q.o., la funzione  $f$  è uguale q.o. ad una funzione misurabile (una qualsiasi tra  $\overline{\varphi}$  e  $\underline{\varphi}$ ) ed è dunque misurabile per il Teorema 2.4.10.

Sia allora

$$\Delta = \{x \in E : \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \in E : \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > \frac{1}{k}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k.$$

Se  $x$  appartiene a  $\Delta_k$ , allora si ha, per definizione di  $\overline{\varphi}$  e  $\underline{\varphi}$ , e per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,

$$\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) \geq \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > \frac{1}{k},$$

e quindi, per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,

$$\Delta_k \subseteq \Delta_k^{(n)} = \{x \in E : \overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) > \frac{1}{k}\}.$$

Ma allora, essendo  $\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) \geq [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)] \chi_{\Delta_k^{(n)}}(x)$ , dal Teorema 3.2.3 segue che

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \int_E [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)] dx \geq \int_E [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)] \chi_{\Delta_k^{(n)}}(x) dx \\ &\geq \int_E \frac{1}{k} \chi_{\Delta_k^{(n)}}(x) dx = \frac{m(\Delta_k^{(n)})}{k}. \end{aligned}$$

Pertanto, per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,

$$0 \leq m(\Delta_k) \leq m(\Delta_k^{(n)}) \leq \frac{k}{n},$$

e quindi (facendo tendere  $n$  ad infinito),  $m(\Delta_k) = 0$ , da cui segue  $m(\Delta) = 0$ , ovvero  $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$  q.o.. ■

Come conseguenza del Teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente affinché valga (2.4) è che la funzione  $f$  sia misurabile e limitata; in altre parole, se prendiamo (2.4) come condizione di integrabilità, ogni funzione misurabile e limitata è integrabile. Abbiamo così la seguente definizione.

**Definizione 3.2.7** Sia  $E$  un insieme misurabile con  $m(E) < +\infty$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile e limitata. Definiamo l'integrale secondo Lebesgue di  $f$  su  $E$  come

$$\int_E f(x) dx = \inf \left\{ \int_E \overline{\varphi}(x) dx, \overline{\varphi} \in \overline{\mathcal{S}}(f) \right\} = \sup \left\{ \int_E \underline{\varphi}(x) dx, \underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{S}}(f) \right\}.$$

**Osservazione 3.2.8** Se  $\varphi$  è una funzione semplice, allora  $\varphi$  appartiene sia a  $\overline{\mathcal{S}}(\varphi)$  che a  $\underline{\mathcal{S}}(\varphi)$ . Pertanto,

$$\overline{\int_E \varphi(x) dx} = \underline{\int_E \varphi(x) dx} = \int_E \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i).$$

Alla luce della definizione precedente, l'integrale secondo Lebesgue di  $\varphi$  è proprio il valore definito in (3.2.1); in altre parole, l'integrale secondo Lebesgue estende alle funzioni misurabili il concetto (intuitivo) di integrale dato per funzioni semplici.

**Osservazione 3.2.9** Ricordando che se  $F \subseteq E$  è misurabile e se  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  è misurabile, allora la restrizione di  $f$  a  $F$  è misurabile, ne segue che se  $f$  è anche limitata,  $f$  è integrabile secondo Lebesgue. Siccome  $f \chi_F$  è una funzione misurabile e limitata su  $E$  (come prodotto di funzioni misurabili su  $E$ ), allora  $f \chi_F$  è integrabile su  $E$ . È facile vedere (osservando che il prodotto di una funzione semplice per una caratteristica è ancora una funzione semplice) che si ha

$$\int_F f(x) dx = \int_E f(x) \chi_F(x) dx. \quad (2.6)$$

Sia ora  $E = [a, b]$  e sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  limitata e integrabile secondo Riemann; ci si chiede se  $f$  sia anche integrabile secondo Lebesgue (ovvero, se sia misurabile) e, in caso affermativo, se il suo integrale secondo Lebesgue coincida con il suo integrale secondo Riemann. La risposta, positiva, è data dal seguente teorema.

**Teorema 3.2.10** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata e integrabile secondo Riemann. Allora  $f$  è integrabile secondo Lebesgue e*

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

**Dimostrazione.** Se  $\underline{\varphi}$  è una funzione a gradino tale che  $\underline{\varphi}(x) \leq f(x)$  per ogni  $x$  in  $[a, b]$ , allora  $\underline{\varphi}(x)$  è una funzione semplice (si noti che è misurabile perché gli intervalli sono misurabili) e quindi è in  $\underline{S}(f)$ . Analogamente, se  $\overline{\varphi}$  è una funzione a gradino tale che  $f(x) \leq \overline{\varphi}(x)$  per ogni  $x$  in  $[a, b]$ , allora  $\overline{\varphi}$  è in  $\overline{S}(f)$ . Pertanto, per definizione,

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \overline{\int_{[a,b]} f(x) dx} \leq \mathbf{R} \int_a^b f(x) dx.$$

Siccome  $f$  è integrabile secondo Riemann, le disuguaglianze sono tutte uguaglianze; pertanto  $f$  è misurabile (per il Teorema 3.2.6) e il suo integrale secondo Lebesgue coincide con il suo integrale secondo Riemann. ■

Nel teorema che segue vengono enunciate alcune proprietà dell'integrale secondo Lebesgue.

**Teorema 3.2.11** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni misurabili e limitate su un insieme misurabile  $E$  di misura finita. Allora*

i) per ogni  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$  si ha

$$\int_E [a f(x) + b g(x)] dx = a \int_E f(x) dx + b \int_E g(x) dx; \quad (2.7)$$

ii) se  $f = g$  q.o., allora

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx; \quad (2.8)$$

iii) se  $f \leq g$  q.o., allora

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx; \quad (2.9)$$

pertanto,

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx; \quad (2.10)$$

iv) se  $A \leq f(x) \leq B$  q.o., allora

$$A m(E) \leq \int_E f(x) dx \leq B m(E); \quad (2.11)$$

v) se  $E = A \cup B$ , con  $A$  e  $B$  misurabili e disgiunti, allora

$$\int_E f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx. \quad (2.12)$$

**Dimostrazione.** Sia  $a$  un numero reale e  $f$  una funzione misurabile e limitata su  $E$ ; se  $a = 0$ , allora  $a f(x) \equiv 0$ , l'integrale di  $a f$  è nullo, e si ha la (2.7) per  $b = 0$  e  $g = 0$ . Sia ora  $a \neq 0$ ; se  $\psi$  è una funzione semplice, allora  $a \psi$  è una funzione semplice, e viceversa. Se  $a > 0$ , e  $\bar{\varphi}$  è una funzione semplice in  $\bar{S}(f)$ , allora  $a \bar{\varphi}$  appartiene a  $\bar{S}(a f)$ , e viceversa. Pertanto

$$\int_E a f(x) dx = \inf_{\bar{S}(f)} \int_E a \bar{\varphi}(x) dx = a \inf_{\bar{S}(f)} \int_E \bar{\varphi}(x) dx = a \int_E f(x) dx.$$

Se, invece,  $a < 0$ , e  $\underline{\varphi}$  è in  $\underline{S}(f)$ , allora  $a \underline{\varphi}$  appartiene a  $\bar{S}(a f)$  e viceversa. Pertanto, per definizione di integrale secondo Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_E a f(x) dx &= \inf_{\bar{S}(a f)} \int_E \bar{\varphi}(x) dx = \inf_{\underline{S}(f)} \int_E a \underline{\varphi}(x) dx \\ &= a \sup_{\underline{S}(f)} \int_E \underline{\varphi}(x) dx = a \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

Siano ora  $\bar{\varphi}_1$  in  $\bar{S}f$  e  $\bar{\varphi}_2$  in  $\bar{S}g$ ; allora  $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$  è in  $\bar{S}(f + g)$  e quindi, per definizione di integrale e per la (2.2)

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx \leq \int_E [\bar{\varphi}_1(x) + \bar{\varphi}_2(x)] dx = \int_E \bar{\varphi}_1(x) dx + \int_E \bar{\varphi}_2(x) dx.$$

Passando all'estremo inferiore sulle  $\bar{\varphi}_1$  in  $\bar{S}(f)$  e sulle  $\bar{\varphi}_2$  in  $\bar{S}(g)$  al secondo membro, si ha

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx \leq \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx .$$

Siano poi  $\underline{\varphi}_1$  in  $\underline{S}(f)$  e  $\underline{\varphi}_2$  in  $\underline{S}(g)$ ; allora  $\underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2$  è in  $\underline{S}(f + g)$  e si ha

$$\int_E \underline{\varphi}_1(x) dx + \int_E \underline{\varphi}_2(x) dx = \int_E [\underline{\varphi}_1(x) + \underline{\varphi}_2(x)] dx \leq \int_E [f(x) + g(x)] dx .$$

Prendendo l'estremo inferiore sulle  $\underline{\varphi}_1$  in  $\underline{S}(f)$  e sulle  $\underline{\varphi}_2$  in  $\underline{S}(g)$  al primo membro, si ottiene

$$\int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx \leq \int_E [f(x) + g(x)] dx ,$$

da cui segue che

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx ,$$

e quindi la (2.7), combinando questo risultato con quello ottenuto per  $a f$ .

Per provare (2.8) è sufficiente allora provare che se  $f = g$  q.o.,

$$\int_E [f(x) - g(x)] dx = 0 . \quad (2.13)$$

Siccome  $f - g = 0$  q.o., se  $\bar{\varphi}$  è in  $\bar{S}(f - g)$ , allora  $\bar{\varphi} \geq f - g$  e quindi  $\bar{\varphi} \geq 0$  q.o.; analogamente, se  $\underline{\varphi}$  è in  $\underline{S}(f - g)$ , allora  $\underline{\varphi} \leq f - g$  e quindi  $\underline{\varphi} \leq 0$  q.o.. Ricordando (2.3), si ha allora

$$\int_E \underline{\varphi}(x) dx \leq 0 \leq \int_E \bar{\varphi}(x) dx ,$$

e quindi

$$\sup_{\underline{S}(f-g)} \int_E \underline{\varphi}(x) dx \leq 0 \leq \inf_{\bar{S}(f-g)} \int_E \bar{\varphi}(x) dx .$$

Essendo le due quantità uguali all'integrale di  $f - g$ , ne segue (2.13).

Un ragionamento analogo (anzi, metà del ragionamento), permette di provare (2.9), mentre (2.10) segue dal fatto che  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  ovunque, e che se  $f$  è misurabile e limitata allora lo è  $|f|$ .

La formula (2.11) segue direttamente da (2.9), osservando che, per definizione di integrale di una funzione caratteristica,

$$\int_E A dx = A \int_E 1 dx = A \int_E \chi_E(x) dx = A m(E).$$

Essendo poi  $\chi_E = \chi_A + \chi_B$ , si ha, per definizione, e per (2.7)

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_E [f(x) \chi_A(x) + f(x) \chi_B(x)] dx \\ &= \int_E f(x) \chi_A(x) dx + \int_E f(x) \chi_B(x) dx \\ &= \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx, \end{aligned}$$

che è la (2.12). ■

Sia ora  $f_n$  una successione di funzioni misurabili e limitate definite su un insieme  $E$  misurabile di misura finita. Si può allora calcolare l'integrale di  $f_n$  su  $E$ . Supponiamo che la successione  $f_n$  converga quasi ovunque in  $E$  ad una funzione  $f$ : tale funzione risulta misurabile per il Teorema 2.4.7; se supponiamo che la  $f$  sia anche limitata, allora ha senso considerare l'integrale di  $f$  su  $E$ , così come ha senso porsi la domanda se l'integrale delle  $f_n$  converga all'integrale della  $f$ . La risposta è affermativa, se sulle funzioni  $f_n$  (che sono limitate per ipotesi) si richiede che la limitatezza sia "uniforme". Osserviamo che senza l'ipotesi di limitatezza sulla funzione  $f$ , la domanda se l'integrale delle  $f_n$  converga o meno all'integrale della  $f$  non ha alcun senso, dal momento che l'integrale della  $f$  non è definito.

**Teorema 3.2.12 (Convergenza limitata)** *Sia  $E$  un insieme misurabile di misura finita, e sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{R}$  una successione di funzioni misurabili tali che*

- i) *esiste  $M \geq 0$  tale che  $|f_n(x)| \leq M$  per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$  e per ogni  $x$  in  $E$ ;*
- ii) *esiste una funzione limitata  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  tale che  $f_n$  converge quasi ovunque ad  $f$  in  $E$ .*

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad (2.14)$$

**Dimostrazione.** Sia  $\varepsilon > 0$ . Applichiamo il Teorema di Egorov (Teorema 2.4.15) e determiniamo un insieme  $A_\varepsilon$  contenuto in  $E$ , con  $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ , tale che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $E \setminus A_\varepsilon$ ; ciò vuol dire che (per lo stesso  $\varepsilon$ ) esiste  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$  tale che

$$\sup_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Si ha allora, per  $n \geq n_\varepsilon$ , usando i risultati del Teorema 3.2.11, e detto  $M'$  il numero reale positivo tale che  $|f(x)| \leq M'$  per ogni  $x$  in  $E$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| &= \left| \int_E [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\quad + \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq m(E \setminus A_\varepsilon) \sup_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \\ &\quad + (M + M') m(A_\varepsilon) \\ &\leq m(E) \varepsilon + (M + M') \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi la tesi. ■

**Osservazione 3.2.13** Se la successione  $f_n$  converge puntualmente (ovvero, ovunque) ad  $f$ , la funzione  $f$  è evidentemente limitata come conseguenza dell'ipotesi i). Nel caso in cui la convergenza sia solo q.o., si ha  $|f(x)| \leq M$  solo nell'insieme  $E \setminus A$ , dove  $A$  è l'insieme di misura nulla su cui  $f_n$  non converge ad  $f$ . Su  $A$ , la  $f$  (pur essendo misurabile), può non essere limitata; di qui la necessità di richiedere la limitatezza di  $f$  ovunque.

**Esempio 3.2.14** Riprendiamo la successione  $f_n$  definita nell'Esempio 3.1.1. La successione  $f_n$  soddisfa le ipotesi del teorema precedente, e quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} D(x) dx;$$

si osservi che in questo caso (sia  $f_n$  che  $D$  sono quasi ovunque uguali alla funzione nulla, per cui il risultato "numerico" è banalmente vero), entrambi i membri hanno senso!

### 3.2.2 Funzioni non negative

Grazie al Teorema 3.2.6, ogni funzione misurabile e limitata su un insieme di misura finita è integrabile secondo Lebesgue. Che succede se la funzione  $f$  non è limitata, o l'insieme  $E$  è di misura infinita? Una prima risposta, o meglio una definizione, viene data per funzioni di segno costante.

**Definizione 3.2.15** Sia  $E$  un insieme misurabile, e sia  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. Allora è non vuoto l'insieme  $\underline{M}(f)$  delle funzioni  $h : E \rightarrow \mathbf{R}$  misurabili, limitate, non negative quasi ovunque, tali che  $m(E_0(h)) < +\infty$  e  $h(x) \leq f(x)$  q.o.; infatti, la funzione identicamente nulla è in  $\underline{M}(f)$ . Per una funzione  $h$  in  $\underline{M}(f)$ , definiamo

$$\int_E h(x) dx = \int_E h(x) \chi_{E_0(h)} dx = \int_{E_0(h)} h(x) dx.$$

Definiamo poi l'integrale di  $f$  su  $E$  come

$$\int_E f(x) dx = \sup \left\{ \int_E h(x) dx, h \in \underline{M}(f) \right\}. \quad (2.15)$$

**Osservazione 3.2.16** Se  $E$  è un insieme misurabile di misura finita, e  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$  è una funzione misurabile, non negativa quasi ovunque e limitata, allora  $f$  appartiene a  $\underline{M}(f)$  e pertanto il suo integrale secondo la definizione precedente non è altro che l'integrale di  $f$  definito nella sezione precedente.

**Osservazione 3.2.17** È, ovviamente, possibile che l'integrale di  $f$  su  $E$  valga  $+\infty$ . Ad esempio, se  $f \equiv 1$  su  $\mathbf{R}$ , allora la funzione  $h_n = \chi_{[-n, n]}$  appartiene a  $\underline{M}(f)$  per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$  e quindi

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx \geq \int_{\mathbf{R}} h_n(x) dx = \int_{[-n, n]} 1 dx = m([-n, n]) = 2n.$$

Analogamente, se  $f(x) = 1/x$  su  $(0, 1)$ , la funzione  $h_n$  definita in  $(0, 1)$  da

$$h_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}), \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1), \end{cases}$$

è integrabile secondo Lebesgue (perché è misurabile essendo continua e limitata) e il suo integrale vale (per il Teorema 3.2.10)

$$\int_{(0,1)} h_n(x) dx = \mathbf{R} \int_0^1 h_n(x) dx = 1 + \ln(n),$$

che diverge quando  $n$  tende ad infinito. Siccome  $h_n(x)$  è in  $\underline{M}(f)$  per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ , ne segue che l'integrale di  $f$  su  $(0, 1)$  vale  $+\infty$ . Analogamente, ha valore  $+\infty$  l'integrale della funzione  $f = +\infty \chi_{[0,1]}$ .

L'integrale così definito gode delle "solite" proprietà dell'integrale (almeno quelle che "preservano" la non negatività di una funzione).

**Teorema 3.2.18** *Sia  $E$  un insieme misurabile, e siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite su  $E$ , misurabili e non negative quasi ovunque. Allora*

i) per ogni  $c > 0$  si ha

$$\int_E c f(x) dx = c \int_E f(x) dx; \quad (2.16)$$

ii)

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx; \quad (2.17)$$

iii) se  $f \leq g$  q.o., allora

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx; \quad (2.18)$$

di conseguenza, se  $f = g$  q.o.,

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx; \quad (2.19)$$

**Dimostrazione.** La dimostrazione di (2.16) e (2.18) segue la stessa linea della prova del Teorema 3.2.11 (ad esempio, se  $h$  è in  $\underline{M}(f)$ , allora  $ch$  è in  $\underline{M}(cf)$ , e viceversa). Proviamo allora (2.17). Siano  $h$  in  $\underline{M}(f)$  e  $k$  in  $\underline{M}(g)$ . Allora  $h + k$  è in  $\underline{M}(f + g)$  (si noti che  $E_0(h + k) \subseteq E_0(h) \cup E_0(k)$ , e quindi  $h + k$  è strettamente positiva solo su un insieme di misura finita) e pertanto

$$\int_E h(x) dx + \int_E k(x) dx = \int_E [h(x) + k(x)] dx \leq \int_E [f(x) + g(x)] dx.$$

Passando all'estremo superiore per  $h$  in  $\underline{M}(f)$  e  $k$  in  $\underline{M}(g)$ , si ha

$$\int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx \leq \int_E [f(x) + g(x)] dx. \quad (2.20)$$

Viceversa, sia  $l$  in  $\underline{M}(f + g)$ , e definiamo  $h(x) = \min(f^+(x), l(x))$  e  $k(x) = l(x) - h(x)$ . Evidentemente  $h$  appartiene a  $\underline{M}(f)$  (dove  $l$  è nulla anche  $h$  è nulla, e pertanto  $h$  è diversa da zero solo su un insieme di misura finita); inoltre,  $k$  vale o 0 (dove coincide con  $l$ ), oppure  $l - f^+ \leq g$  (essendo  $l \leq f + g$ , si ha  $l \leq f^+ + g$ ), e quindi si ha sempre  $k(x) \leq g(x)$ ; pertanto,  $k$  appartiene a  $\underline{M}(g)$  e si ha

$$\int_E l(x) dx = \int_E h(x) dx + \int_E k(x) dx \leq \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di  $l$  in  $\underline{M}(f + g)$  si ha allora

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx \leq \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx,$$

che, insieme a (2.20), dà la tesi.  $\blacksquare$

Il prossimo teorema, di importanza fondamentale, è il primo passo per estendere il risultato del Teorema di convergenza limitata a successioni di funzioni misurabili qualsiasi.

**Teorema 3.2.19 (Lemma di Fatou)** *Sia  $E$  un insieme misurabile, e sia  $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una successione di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque tale che  $f_n$  converge quasi ovunque in  $E$  ad una funzione  $f$ . Allora*

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx. \quad (2.21)$$

**Dimostrazione.** Sia  $h$  in  $\underline{M}(f)$ , e definiamo

$$h_n(x) = \max[\min[h(x), f_n(x)], 0].$$

La funzione  $h_n$  è misurabile (perché sia  $h$  che  $f_n$  lo sono), è limitata (perché  $h_n \geq 0$  ovunque,  $h_n \leq h$  quasi ovunque, e dove  $h_n$  è maggiore di  $h$  si ha  $h_n = 0$  essendo  $h < 0$ ) e non negativa su  $E$ , è tale che  $m(E_0(h_n)) < +\infty$  (perché  $E_0(h_n) \subseteq E_0(h)$ , e  $E_0(h)$  ha misura finita essendo  $h$  in  $\underline{M}(f)$ ) e si ha  $h_n(x) \leq f_n(x)$  quasi ovunque (per definizione). Pertanto,  $h_n$  è in  $\underline{M}(f_n)$  e quindi

$$\int_E h_n(x) dx \leq \int_E f_n(x) dx, \quad (2.22)$$

per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ . Siccome  $h(x) \leq f(x)$  q.o. in  $E$ , e  $f_n$  converge a  $f$  q.o. in  $E$ , si ha che  $h_n(x)$  converge a  $h(x)$  q.o. in  $E$  per  $n$  tendente ad infinito; inoltre  $h_n(x)$  è equilimitata; è allora possibile applicare il Teorema di convergenza limitata alla successione  $h_n$  ristretta all'insieme (di misura finita)  $E_0(h)$ , ed ottenere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_0(h)} h_n(x) dx = \int_{E_0(h)} h(x) dx .$$

Essendo però  $E_0(h_n) \subseteq E_0(h) \subseteq E$ , ed essendo  $h_n$  nulla su  $E_0(h) \setminus E_0(h_n)$  si ha

$$\int_{E_0(h)} h_n(x) dx = \int_{E_0(h_n)} h_n(x) dx = \int_E h_n(x) dx ,$$

per definizione di integrale di  $h_n$  su  $E$ , e quindi (per definizione di integrale di  $h$  su  $E$ ),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E h_n(x) dx = \int_E h(x) dx .$$

Ricordando (2.22) si ha allora

$$\int_E h(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E h_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx .$$

Passando all'estremo superiore per  $h$  in  $\underline{M}(f)$  si ha la tesi.  $\blacksquare$

Se aggiungiamo un'ipotesi — la monotonia — alla successione  $f_n$ , la tesi del teorema precedente è ancora più forte.

**Teorema 3.2.20 (Beppo Levi – Convergenza monotona)** *Sia  $E$  un insieme misurabile, e sia  $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una successione crescente di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque. Detto  $f$  il limite puntuale delle  $f_n$ , si ha*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx \quad (2.23)$$

**Dimostrazione.** Per il Lemma di Fatou, abbiamo

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx ;$$

inoltre, essendo  $f_n \leq f$  ovunque in  $E$ , per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$  si ha

$$\int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx ,$$

da cui

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx ,$$

e quindi la tesi. ■

**Corollario 3.2.21** *Sia  $E$  un insieme misurabile e  $g_n : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una successione di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque. Detta*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i(x) dx ,$$

si ha

$$\int_E f(x) dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E g_i(x) dx .$$

**Dimostrazione.** È sufficiente usare le proprietà dell'integrale e applicare il Teorema di convergenza monotona alla successione crescente di funzioni non negative quasi ovunque

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) .$$

■

**Teorema 3.2.22** *Sia  $E$  un insieme misurabile e sia  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. Sia  $\{E_n\}$  una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti e tali che la loro unione è  $E$ ; allora*

$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f(x) dx .$$

**Dimostrazione.** Detta  $g_n = f \chi_{E_n}$ , si può applicare il Corollario 3.2.21 dal momento che  $f$  è proprio la somma della serie delle  $g_n$  e che

$$\int_E g_n(x) dx = \int_{E_n} f(x) dx .$$

■

Abbiamo fino ad ora parlato di integrale per funzioni misurabili e non negative, e abbiamo provato alcune proprietà, tra le quali il fatto che l'integrale

della somma di due funzioni è la somma degli integrali. Dal momento che abbiamo a che fare con valori che possono essere infiniti, è chiaro che non possiamo parlare di legami tra l'integrale della differenza di due funzioni e la differenza degli integrali; ad esempio, prendendo  $f \equiv 2$  e  $g \equiv 1$  su  $\mathbf{R}$ , l'integrale di entrambe le funzioni è infinito, come l'integrale della differenza, ma se prendiamo  $f = 1 + \chi_{[0,1]}$  e  $g \equiv 1$ , la differenza ha integrale 1. Per poter operare in maniera algebricamente corretta, diamo la seguente definizione.

**Definizione 3.2.23** Sia  $E$  un insieme misurabile e  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. La funzione  $f$  si dice **sommabile** se si ha

$$\int_E f(x) dx < +\infty.$$

Vale allora il seguente risultato.

**Teorema 3.2.24** Sia  $E$  un insieme misurabile e siano  $f$  e  $g$  due funzioni misurabili e non negative quasi ovunque definite su  $E$ . Supponiamo che  $f$  sia sommabile e che  $g(x) \leq f(x)$  q.o. in  $E$ . Allora  $g$  è sommabile e si ha

$$\int_E [f(x) - g(x)] dx = \int_E f(x) dx - \int_E g(x) dx. \quad (2.24)$$

**Dimostrazione.** Si ha  $f = (f - g) + g$ , con  $g$  e  $f - g$  non negative quasi ovunque. Allora, per (2.17)

$$\int_E f(x) dx = \int_E [f(x) - g(x)] dx + \int_E g(x) dx.$$

Siccome il primo membro è finito per ipotesi, lo sono entrambi gli addendi a destra (essendo non negativi); pertanto,  $g$  è sommabile e si ha la (2.24). ■

Una funzione sommabile non può assumere il valore  $+\infty$  su insiemi di misura positiva.

**Teorema 3.2.25 (Chebyshev)** Sia  $E$  un insieme misurabile, e  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile, non negativa quasi ovunque e sommabile. Allora, per ogni  $\lambda > 0$  si ha

$$\lambda m(\{x \in E : f(x) \geq \lambda\}) \leq \int_E f(x) dx. \quad (2.25)$$

In particolare,  $m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = 0$ .

**Dimostrazione.** Si ha, quasi ovunque in  $E$ ,

$$\lambda \chi_{\{x \in E: f(x) \geq \lambda\}} \leq f(x) \chi_{\{x \in E: f(x) \geq \lambda\}} \leq f(x),$$

e quindi, integrando;

$$\lambda m(\{x \in E : f(x) \geq \lambda\}) \leq \int_{\{x \in E: f(x) \geq \lambda\}} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx.$$

Definiamo poi  $E_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ . Allora  $m(E_1) < +\infty$  (essendo minore dell'integrale di  $f$  su  $E$ , finito per ipotesi),  $E_{n+1} \subseteq E_n$  e  $\{x \in E : f(x) = +\infty\}$  è l'intersezione degli  $E_n$ . Allora, per (2.25),

$$m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(E_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_E f(x) dx = 0,$$

e quindi la tesi. ■

Per funzioni sommabili vale il seguente risultato, detto “assoluta continuità dell'integrale”.

**Teorema 3.2.26** *Sia  $E$  un insieme misurabile e sia  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  misurabile, non negativa quasi ovunque e sommabile. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $A \subseteq E$  e  $m(A) \leq \delta$  implica*

$$\int_A f(x) dx \leq \varepsilon.$$

**Dimostrazione.** Se la funzione  $f$  è limitata, ovvero se  $0 \leq f(x) \leq M$  per ogni  $x$  in  $E$ , è sufficiente scegliere  $\delta = \varepsilon/M$  per avere la tesi; infatti, per ogni  $A$  misurabile contenuto in  $E$ ,

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A M dx = M m(A) \leq M \delta = \varepsilon.$$

Supponiamo allora  $f$  non limitata, e definiamo, per  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n, \\ n & \text{se } f(x) > n. \end{cases}$$

Si ha ovviamente  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ , e  $f_n(x)$  converge puntualmente ad  $f$ . Per il teorema di convergenza monotona,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$  tale che, per ogni  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$\int_E f_n(x) dx \geq \int_E f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, scegliendo  $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ , si ha che  $m(A) \leq \delta$  implica

$$\int_A f_{n_\varepsilon}(x) dx \leq n_\varepsilon m(A) \leq n_\varepsilon \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pertanto, se  $m(A) \leq \delta$ , essendo  $[f - f_{n_\varepsilon}] \chi_A \leq [f - f_{n_\varepsilon}]$ ,

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_A [f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)] dx + \int_A f_{n_\varepsilon}(x) dx \\ &\leq \int_E [f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)] dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi la tesi. ■

### 3.2.3 L'integrale di Lebesgue generale

Sia  $E$  un insieme misurabile, e sia  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile; ricordiamo che le funzioni  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$  e  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$  sono misurabili, che  $f = f^+ - f^-$ , mentre  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Definizione 3.2.27** Sia  $E$  un insieme misurabile e  $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile. La funzione  $f$  si dice sommabile su  $E$  se e solo se  $f^+$  e  $f^-$  sono sommabili su  $E$ , ovvero se e solo se  $|f|$  è sommabile su  $E$ ; in tal caso, definiamo

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx.$$

Anche l'integrale generale di Lebesgue gode delle proprietà solite, la cui dimostrazione è omessa.

**Teorema 3.2.28** Sia  $E$  un insieme misurabile e siano  $f$  e  $g$  funzioni misurabili a valori in  $\bar{\mathbf{R}}$ , entrambe sommabili. Allora

i) per ogni  $c$  in  $\mathbf{R}$  la funzione  $cf$  è sommabile su  $E$ , e si ha

$$\int_E cf(x) dx = c \int_E f(x) dx;$$

ii) la funzione  $f + g$  è sommabile su  $E$ , e si ha

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx;$$

iii) se  $f \leq g$  q.o., allora

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx;$$

di conseguenza, se  $f = g$  q.o., allora

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx;$$

iv) se  $E = A \cup B$ , con  $A$  e  $B$  disgiunti e misurabili, allora

$$\int_E f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

**Osservazione 3.2.29** Si noti che  $f(x) + g(x)$  non è definita su  $G_{+\infty}(f) \cap G_{-\infty}(g)$  e su  $G_{-\infty}(f) \cap G_{+\infty}(g)$ . Questi insiemi, però, hanno misura nulla per il Teorema 3.2.25; pertanto, qualsiasi sia il valore assegnato a  $f + g$  su questi punti, il valore dell'integrale non cambia.

Per le funzioni sommabili vale un ulteriore teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, che indebolisce le ipotesi fatte nel Teorema della convergenza limitata (che ne diventa un caso particolare).

**Teorema 3.2.30 (Lebesgue – Convergenza dominata)** Sia  $E$  un insieme misurabile e sia  $g : E \rightarrow \bar{R}$  una funzione misurabile e sommabile. Sia  $f_n : E \rightarrow \bar{R}$  una successione di funzioni misurabili tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  quasi ovunque in  $E$ . Supponiamo inoltre che  $f_n$  converga quasi ovunque a  $f$  in  $E$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Dimostrazione.** La successione  $g - f_n$  è fatta di funzioni non negative quasi ovunque e converge quasi ovunque in  $E$  alla funzione  $g - f$ , non negativa quasi

ovunque anch'essa (dal momento che  $f_n(x)$  converge a q.o. a  $f(x)$ ). Per il Lemma di Fatou,

$$\int_E [g(x) - f(x)] dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E [g(x) - f_n(x)] dx.$$

Essendo  $|f| \leq g$ , con  $g$  sommabile, anche  $f$  lo è, e quindi dalla disuguaglianza precedente segue che

$$\int_E g(x) dx - \int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx,$$

e quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx.$$

Considerando  $g + f_n$ , si ha che

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x),$$

e quindi la tesi. ■

### 3.2.4 Convergenza in misura

Strettamente legato ai teoremi di passaggio al limite è il concetto di convergenza in misura.

**Definizione 3.2.31** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile  $E$  a valori in  $\bar{\mathbf{R}}$ . La successione  $f_n$  si dice convergente a  $f$  **in misura** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$  tale che

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Alternativamente,  $f_n$  converge a  $f$  in misura se per ogni  $\lambda > 0$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) = 0.$$

Se  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni sommabili tali che l'integrale di  $|f_n|$  tende a zero, allora  $f_n$  tende a zero in misura. Infatti, per (2.25),

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x)| dx \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda m(\{x \in E : |f_n(x)| \geq \lambda\}).$$

Il legame tra la convergenza in misura e la convergenza quasi ovunque è dato dal seguente teorema.

**Teorema 3.2.32** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile  $E$  a valori in  $\bar{\mathbf{R}}$ . Se  $f_n$  converge in misura a  $f$ , allora esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge quasi ovunque a  $f$ .

**Dimostrazione.** Sia  $k$  in  $\mathbf{N}$ . Siccome  $f_n$  converge in misura a  $f$ , esiste  $n_k$  in  $\mathbf{N}$  tale che

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}) \leq 2^{-k}, \quad \forall n \geq n_k.$$

Definiamo  $E_k = \{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}$  e sia, per  $h$  in  $\mathbf{N}$  fissato,

$$A_h = \bigcup_{k \geq h} E_k.$$

Per la subadditività della misura si ha  $m(A_h) \leq 2^{-h+1}$ . Sia ora  $x$  in  $E \setminus A_h$ . Allora  $x$  non appartiene all'insieme su cui  $|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}$  per ogni  $k \geq h$ , e quindi

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2^{-k}, \quad \forall k \geq h.$$

Pertanto, per ogni  $h$  in  $\mathbf{N}$  si ha che  $f_{n_k}(x)$  converge a  $f(x)$  su  $E \setminus A_h$ . Sia ora

$$A = \bigcap_{h=1}^{+\infty} A_h.$$

Dal momento che  $m(A_1) \leq 1$ , e che gli  $A_h$  sono una successione decrescente, si ha

$$m(A) = \lim_{h \rightarrow +\infty} m(A_h) = 0.$$

Siccome  $f_{n_k}(x)$  converge a  $f(x)$  su  $E \setminus A_h$  per ogni  $h$ , allora  $f_{n_k}(x)$  converge a  $f(x)$  su  $E \setminus A$ , e quindi la si ha la tesi. ■

Alla luce del precedente risultato, è possibile modificare l'ipotesi “ $f_n$  converge a  $f$  q.o.” nel lemma di Fatou e nei teoremi di convergenza limitata e dominata, sostituendoli con “ $f_n$  converge a  $f$  in misura”.

**Esempio 3.2.33** Il contrario del teorema precedente non è vero in generale: se  $f_n$  converge quasi ovunque a  $f$ , non è detto che  $f_n$  converga in misura a  $f$  (né che lo faccia una sua sottosuccessione). Ad esempio, se  $f_n = \chi_{(-n,n)}$ ,  $f_n$  converge quasi ovunque a  $f \equiv 1$  in  $\mathbf{R}$ , ma  $f_n$  non converge in misura ad  $f$  dal momento che, per ogni  $\lambda > 0$ ,

$$m(\{x \in \mathbf{R} : |f_n(x) - 1| \geq \lambda\}) = m(\mathbf{R} \setminus (-n, n)) = +\infty.$$

**Esempio 3.2.34** Se, però,  $m(E) < +\infty$ , ogni successione convergente quasi ovunque converge in misura. Infatti, per il Teorema di Egorov, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $A_\varepsilon$  contenuto in  $E$ , con  $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ , e  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$ , tali che

$$\sup_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Pertanto, per  $n \geq n_\varepsilon$  l'insieme degli  $x$  di  $E$  su cui  $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$  è contenuto in  $A_\varepsilon$  e ha dunque misura minore di  $\varepsilon$ .

Una volta introdotto il concetto di convergenza in misura, si può enunciare il seguente teorema, che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per poter passare al limite sotto il segno di integrale.

**Teorema 3.2.35 (Vitali)** *Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile  $E$ , e supponiamo che  $f_n$  converga a  $f$  in misura. Allora*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0, \\ \iff \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : m(A) < \delta \implies \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_A |f_n(x)| dx \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La seconda condizione del teorema precedente prende il nome di equiasoluta integrabilità della successione  $\{f_n\}$ . Il Teorema di Vitali permette di migliorare il Teorema di Lebesgue.

**Teorema 3.2.36** *Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile  $E$ , e supponiamo che  $f_n$  converga a  $f$  in misura. Supponiamo inoltre che, per ogni  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g_n(x)$  quasi ovunque, con  $\{g_n\}$  successione di funzioni misurabili tali che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |g_n(x) - g(x)| dx = 0,$$

per qualche funzione  $g$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

**Dimostrazione.** Dal momento che l'integrale di  $|g_n(x) - g(x)|$  tende a zero, per il Teorema di Vitali ( $\Rightarrow$ ) la successione  $\{g_n\}$  è equiassolutamente integrabile. Ovvero, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $m(A) < \delta$  implica

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_A |g_n(x)| dx \leq \varepsilon,$$

Essendo  $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ , si ha

$$\int_A |f_n(x)| dx \leq \int_A |g_n(x)| dx \leq \varepsilon,$$

per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ , non appena  $m(A) < \delta$ . La successione  $\{f_n\}$  è pertanto equiassolutamente integrabile, e dal Teorema di Vitali ( $\Leftarrow$ ) si ha la tesi. ■